UNIVERSITE DE PROVENCE

CENTRE UNIVERSITAIRE SAINT CHARLES

CENTRE DE 3ème CYCLE DE MECANIQUE DES FLUIDES

-=-

THESE

DE DOCTEUR-INGENIEUR

-

ETUDE THEORIQUE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE DANS LA REGION LA MOINS EXPOSEE AU VENT D'UN CONE EN INCIDENCE

par

Bernard FORESTIER

Soutenue le 14 Juin 1974

à l'Institut de Mécanique des Fluides, Salle "Frédéric Zerner"
devant la Commission d'Examen

M.	J. VALENSI,	Professeur à l'Université de Provence Président
Mlle	C. CLARION,	Professeur à l'Université de Provence
M.	R. PEYRET ,	Maître de Recherche au C.N.R.S.
M.	B. ROUX ,	Chargé de Recherche au C.N.R.S.

Travail effectué à l'Institut de Mécanique des Fluides
de Marseille

ETUDE THEORIQUE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE DANS LA REGION LA MOINS EXPOSEE AU VENT D'UN CONE EN INCIDENCE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

AVANT PROPOS

Au terme de cette étude qui me permet de soutenir une thèse de docteur ingénieur, je tiens à exprimer ma gratitude au professeur Jacques Valensi, Directeur de l'I.M.F.M., Correspondant de l'Académie des Sciences, pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués.

Mes remerciements s'adressent également à Mademoiselle Claire Clarion, Professeur à l'Université de Provence pour l'intérêt qu'elle a pris à ce présent travail et pour avoir accepté d'être membre du Jury.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Roger Peyret dont les nombreuses remarques et suggestions concernant la résolution d'équations de Navier-Stokes aux grands nombres de Reynolds ont été déterminantes pour mener à bien cette étude.

Je remercie très vivement Monsieur Bernard Roux, Chargé de Recherche au C.N.R.S. qui a dirigé cette recherche et a assuré une part importante de la réalisation et de la présentation définitive de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à tous ceux qui ont permis l'édition de ce mémoire.

UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX-MARSEILLE I)

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM.	BIZOUARD Michel	Physique
	BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme	BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM.	BODIOU Georges	Mathématiques appliquées
	BODOT Aubert	Chimie
	BONNEAU Marcel	Mathématiques
	CADILHAC Michel	Physique
	CARPENI Georges	Chimie
	CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mle	CLARION Claire	Mécanique des Fluides
MM.	DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
	DOUCET Yves	Physique
	FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	FEHRENBACH Charles	Astronomie
	FOURES Léonce	Mathématiques
	FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme	FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM.	GIRARDIE Adrien	Zoologie
	GOUVERNET Claude	Géologie appliquée
	HERVE Jacques	Electronique
	HUGON Maurice	Psycho-physiologie
	JULG André	Chimie théorique
	LAFFITTE Marc	Chimie
	MALE Damien	Physique
	MANDELBROJT Jacques	Physique
	MARCHIS-MOUREN GUY	Chimie biologique

UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX-MARSEILLE I)

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. scientifiques)

Professeurs titulaires

MM. BIZOUARD Michel	Physique
BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM. BONION Georges	Astronomiques appliquées
BOUCT Albert	Géologie
BOUREAU Marcel	Mathématiques
CADILHAC Michel	Physique
CARPENI Georges	Chimie
CASAD Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mlle CLAROW Claire	Mécanique des fluides
MM. DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
DOUCET Yves	Physique
EATES Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et
	météorologie
SCHERMANN Charles	Astronomie
FOURES Jeanne	Mathématiques
FRAISSE Roland	Géométriques
Mme FUMOUSTIN Jeanne-Louise	Biologie animale
MM. GIAMARCHI André	Géologie
GONTSCHOFF Claude	Géologie appliquée
GERVS Jacques	Electronique
HUGON Maurice	Psycho-physiologie
JULIO André	Calcul numérique
LAFFITTE Marc	Chimie
MALE Gaston	Physique
MARTELLANGE Jacques	Physique
MARCHAL-MOUREY Guy	Chimie biologique

MM.	MERIGOUX Roger	Physique industrielle
	NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
	NEGRE Robert	Biologie végétale
	SIMON Claude	Physiologie animale
	SOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
Mme	TAXY Suzanne	Géologie historique
MM.	VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
	VISCONTI Antoine	Physique théorique

Professeurs sans chaire

MM.	BOREL Fernand	Techniques mathématiques de la physique
	BOUDET Roger	Mathématiques
Mle	CATZIGRAS France	Géologie historique
Mle	CHANDEBOIS Rosine	Biologie animale
M.	COMBET Serge	Chimie
Mme	DELACHE Solange	Mathématiques
MM.	FEUGEAS Claude	Chimie
	FOUGEREAU Michel	Biochimie
	GILLET André	Mathématiques
	GUENOCHE Henri	Mathématiques appliquées
	GUERMEUR Robert	Physique
	HALBWACHS Francis	Physique
	HENNEQUIN Jacques	Electronique
	MANUCEAU Jérôme	Mathématiques
	MERDY Henri	Physique
Mle	PICHENOT Mathilde	Biologie végétale
M.	SARDA Louis	Biochimie
Mme	SIRUGUE Madeleine	Physique
M.	TACHOIRE Henri	Chimie

Maîtres de conférences

MM.	BELAICH Jean-Pierre	Microbiologie
	BENARROCHE Marcel	Physique
	BENLIAN David	Chimie de coordination

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0022

MM.	CASALOT André	Chimie
	CRESP Jean	Biologie animale
	DELAAGE Michel	Biochimie
Mle	DETRAZ Jacqueline	Mathématiques
MM.	FARDOUX Gérard	Mathématiques
	LAVAGNE André	Biologie végétale
	MARTINET Bernard	Mathématiques
	MOULINS Maurice	Biologie végétale
	PUJOL Louis	Chimie
	PUJOL Rémy	Psycho-physiologie
	SOUBLIN Jean-Pierre	Mathématiques
	STREIFF Roland	Chimie

Chargés d'enseignement

M.	DELEUIL Roger	Physique

TABLES DES MATIERES

page

1. INTRODUCTION 1

2. TRAVAUX ANTERIEURS 4

2.1. Etudes à une variable indépendante 4
2.2. Etudes à deux variables indépendantes 6
2.3. Etudes à trois variables indépendantes 8

3. EQUATIONS DU MOUVEMENT 10

3.1. Equations de Navier Stokes 10
3.2. Equations de l'écoulement de couche limite dans la région la moins exposée au vent 12
3.3. Equation de quantité de mouvement azimutale dans la région la moins exposée au vent 15
3.4. Nature mathématique de l'équation de quantité de mouvement azimutale 17
3.5. Conditions générales de calcul 18

3.5.1. Choix pour les quantités u, T, v 18
3.5.2. Conditions limites 18
3.5.3. Changement de variable en azimut 19
3.5.4. Forme elliptique de l'équation de mouvement azimutale 20
3.5.5. Forme parabolique de l'équation de mouvement azimutale 20

4. RESOLUTION DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT AZIMUTALE 22

4.1. Equation de Poisson 22
4.2. Méthodes de résolution numérique 26

4.2.1. Méthodes itératives par points 26
4.2.2. Méthodes itératives par blocs 27

4.3. Convergence des méthodes itératives 28

4.3.1. Taux de convergence 29
4.3.2. Nombre d'itérations et précision 29

4.4. Equation elliptique à deux variables indépendantes 30

4.4.1. Discrétisation utilisant des différences centrées 31
4.4.2. Conditions de convergence 33
4.4.3. Discrétisation utilisant des différences décentrées pour les dérivées premières 35

4.5. Equation parabolique à deux variables indépendantes 37

5. RESULTATS 40

5.1. Cas parabolique 40

5.1.1. Comportement de la variable w 41
5.1.2. Comportement de la variable w^* 42

5.2. Cas elliptique 43

5.2.1. Stabilité des solutions 43
5.2.2. Critère de convergence 45
5.2.3. Validité physique des solutions 46
5.2.4. Interprétation physique du critère de convergence 48
5.2.5. Etendue du domaine d'influence de la diffusion azimutale 50

5.2.5.1. Effet d'abscisse 50
5.2.5.2. Effet d'incidence 50
5.2.5.3. Cas des petites incidences 51

page

4.3. Convergence des méthodes itératives 28

4.3.1. Taux de convergence 29
4.3.2. Nombre d'itérations et précision 29

4.4. Equation elliptique à deux variables indépendantes 30

4.4.1. Discrétisation utilisant des différences centrées 31
4.4.2. Conditions de convergence 33
4.4.3. Discrétisation utilisant des différences décentrées pour les dérivées premières 35

4.5. Equation parabolique à deux variables indépendantes 37

5. RESULTATS 40

5.1. Cas parabolique 40

5.1.1. Comportement de la variable w 41
5.1.2. Comportement de la variable w^* 42

5.2. Cas elliptique 43

5.2.1. Stabilité des solutions 43
5.2.2. Critère de convergence 45
5.2.3. Validité physique des solutions 46
5.2.4. Interprétation physique du critère de convergence 48
5.2.5. Etendue du domaine d'influence de la diffusion azimutale 50

5.2.5.1. Effet d'abscisse 50
5.2.5.2. Effet d'incidence 50
5.2.5.3. Cas des petites incidences 51

NOTATIONS

x	Abscisse le long d'une génératrice du cône, mesurée à partir du sommet
y	Coordonnée normale à la surface du cône
ϕ	Coordonnée azimutale
ϕ^*	Coordonnée azimutale transformée, $\sin\Theta_c(\frac{3}{4}Rex)^{0,5}\phi$
Θ_c	Demi-angle au sommet du cône
$r = x \sin\Theta_c + y \cos\Theta_c$	
i	Incidence
$\bar{p}$	Pression statique
p	Pression statique réduite
$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$	Composantes de la vitesse suivant les directions x, y, ϕ
u	Vitesse radiale réduite , $\bar{u}/\bar{u}_e$
v	Vitesse normale réduite , $\bar{v}/\bar{u}_e$
w	Vitesse azimutale réduite, $\bar{w}/\bar{u}_e$
w^*	Vitesse azimutale réduite, $\bar{w}/\bar{w}_e$
$\bar{T}$	Température
T	Température réduite , $\bar{T}/\bar{T}_e$
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse de composantes $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$
$\bar{\mu}$	Premier coefficient de viscosité
μ	Premier coefficient de viscosité réduit $\bar{\mu}/\bar{\mu}_e$
$\bar{\nu}$	Coefficient de viscosité cinématique
$\bar{\lambda}$	Deuxième coefficient de viscosité
$\bar{\rho}$	Densité volumique
ρ	Densité volumique réduite $\bar{\rho}/\bar{\rho}_e$
$\bar{h}$	Enthalpie par unité de masse

$\overline{k}$	Conductivité thermique
$\overline{\delta}$	Epaisseur de couche limite
Re	Nombre de Reynolds unitaire, $Re = \frac{\overline{\rho}_e \overline{\mu}_e}{\overline{\mu}_e}$
Rex	Nombre de Reynolds
C_p	Chaleur spécifique à pression constante
γ	Rapport des chaleurs spécifiques
η	Variable de similitude de Lees-Dorodnicyn
K',L',M',P'	Paramètre de l'écoulement extérieur défini par les expressions 3,7
C	Constante de Chapman Rubesin
j,k	Indices du point du réseau où sont satisfaites les équations aux différences
α,P,Q,R	Coefficients de l'équation 4,17
$\delta^2, \Theta_x, \Theta_y$	Expressions définies en 4,18
$B_{j,k}$, $C_{j,k}$, $D_{j,k}$, $E_{j,k}$, $F_{j,k}$	: Coefficients définis successivement en 4,19(a), 4,28 et 4,32 .

<u>Indices</u>

e	Conditions à la frontière extérieure de la couche limite
p	Conditions à la paroi
O	Conditions d'arrêt
∞	Conditions en amont de l'onde de choc

page

5.2.6. Précisions des calculs 51

5.2.6.1. Influence de la taille du pas 51

5.2.6.2. Erreurs de troncature 54

5.2.7. Calculs à $\Delta\phi^x$ constants 55

6. CONCLUSION 57

ANNEXE 60

REFERENCES 63

1. INTRODUCTION

L'étude du champ d'écoulement se développant sur des corps de rentrée dans l'atmosphère a fait l'objet de la part de nombreux laboratoires d'efforts de recherche théorique et expérimentale considérables.

En ce qui concerne l'étude de la couche limite laminaire tridimensionnelle sur un corps de révolution en incidence dans un courant supersonique et hypersonique, les premiers travaux à l'I.M.F.M. ont été effectués dès 1964 sur le plan théorique par Valensi et Guffroy* et sur le plan expérimental par Valensi et Guillaume. Du point de vue du calcul Valensi et Guffroy ont étendu la méthode de Stine et Wanlass au cas tridimensionnel en utilisant l'analogie de symétrie axiale, applicable une fois connues les lignes de courant de l'écoulement extérieur. Les travaux ont été continués ensuite par Valensi, Guffroy, Marcillat et Roux[1] sur des cônes à pointe vive avec ou sans incidence. L'intégration des équations aux dérivées partielles est effectuée en recherchant des solutions localement semblables, la détermination de l'écoulement extérieur non visqueux nécessaire au calcul de la couche limite étant obtenue par une méthode de linéarisation qui permet de réduire à des équations différentielles ordinaires les équations générales du mouvement.

L'étude expérimentale autour du cône a ensuite été approfondie par Marcillat[2], notamment en ce qui concerne l'écoulement de couche limite.

Avec les possibilités nouvelles offertes par les ordinateurs, le calcul des équations usuelles de la couche limite laminaire de Prandtl a pu être entrepris numériquement dans le plan de symétrie du cône pointu avec ou sans incidence par Roux et Rey[3]. Dans ce cas, les équations aux dérivées partielles peuvent se ramener, en utilisant une variable de similitude, à des équations différentielles ordinaires intégrables par une méthode de Runge-Kutta.

Hors du plan de symétrie, la recherche de solutions de similitude dans la couche limite mène à un système

---

* VALENSI J., GUFFROY D., C.R.A.S., t. 259, p. 2344-2346 (Oct. 1964)

d'équations aux dérivées partielles à deux dimensions, pour lequel Roux[9] dans son mémoire de thèse a mis au point une méthode de calcul aux différences finies utilisant un écoulement extérieur obtenu aussi par une méthode aux différences finies. Les résultats théoriques ont permis d'excellents recoupements expérimentaux sur toute la surface du cône sauf près du plan le moins exposé au vent ($\phi = \pi$) où la méthode numérique présente des solutions singulières lorsque l'incidence est supérieure à une certaine incidence critique variant avec la température de paroi et le nombre de Mach de l'écoulement extérieur, mais restant toujours petite.

La confluence des deux écoulements provenant des deux côtés du cône du plan de symétrie le moins exposé au vent suggère la présence d'une région limite de part et d'autre du plan $\phi = \pi$ où les conditions de symétrie doivent être respectées.

En se limitant aux incidences inférieures à l'incidence de séparation, il est proposé dans le présent mémoire de modifier le système d'équations paraboliques classiques en y ajoutant principalement des termes de diffusion azimutales contenus dans les équations de Navier Stokes mais négligés dans l'analyse d'ordre de grandeur de Prandtl.

Les termes de diffusion azimutales permettent la prise en compte des conditions de symétrie au plan $\phi = \pi$, mais interdisent l'existence de solutions semblables. L'hypothèse de similitude locale a néanmoins été faite, et on obtient un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire à deux variables indépendantes, dépendant du nombre de Reynolds.

La résolution numérique d'un tel système étant complexe, on s'est limité au calcul de l'équation de quantité de mouvement azimutale seule dans une région étroite comprise entre un plan origine où les solutions paraboliques sont censées être encore valables et le plan de symétrie $\phi = \pi$.

Le champ de calcul est alors un domaine rectangulaire où les conditions limites sont à satisfaire sur toute la frontière du domaine.

Pour les grands nombres de Reynolds le problème de la convergence du processus itératif utilisant une méthode de Gauss Seidel par ligne est envisagé théoriquement pour un schéma de discrétisation centré et un schéma décentré. Des calculs ont été effectués pour recouper les prévisions théoriques.

On a cherché à éclaircir le problème de la singularité des solutions paraboliques de Prandtl en montrant au moins sur l'équation de quantité de mouvement seule qu'avec l'adjonction du terme diffusion azimutale, l'évolution de la vitesse azimutale redevenait régulière jusques et y compris au plan de symétrie $\phi = \pi$.

L'examen de la continuité entre la solution parabolique amont et la solution elliptique avale est utilisé pour préciser l'étendue de la zone limite où l'influence de la diffusion azimutale est non négligeable.

2. TRAVAUX ANTERIEURS

Les premières études théoriques concernant l'écoulement de couche limite sur un cône circulaire en incidence dans un courant supersonique sont dues à Hayes[4] et Moore[5][6] ; ceux-ci montrent l'existence de solutions semblables pour les équations de la couche limite lorsqu'on admet un certain nombre d'hypothèses telles que : écoulement extérieur conique, pression constante dans la direction normale à la paroi, diffusion azimutale négligeable.

A l'exception de Lin et Rubin[7] et plus récemment d'Helliwell et Lubard[8], les différents auteurs qui ont depuis étudié ce problème ont repris ces mêmes hypothèses simplificatrices en recherchant des solutions semblables pour les équations aux plans de symétrie, et pour les équations décrivant l'écoulement sur toute la surface du cône.

2.1. Etudes à une variable indépendante

Aux plans de symétrie, Moore a étudié théoriquement le système d'équations différentielles ordinaires auquel peut se ramener les équations aux dérivées partielles de la couche limite de Prandtl. Du côté le plus exposé au vent ($\phi = 0$), des solutions numériques sont trouvées pour un grand nombre d'incidence, par contre au plan de symétrie le moins exposé au vent ($\phi = \pi$) des solutions ne sont obtenues que pour les très petites incidences.

Moore, pense que ces difficultés numériques peuvent être reliées au problème de la recherche de solution pour la forme asymptotique des équations semblables, lorsque la variable de similitude tend vers l'infini. Au plan $\phi = \pi$ Moore montre, suivant les valeurs du paramètre de l'écoulement potentiel $k = \dfrac{2(w_e)_\phi}{3\, u_e \sin \theta_c}$ caractérisant l'incidence, que les

solutions asymptotiques sont uniques pour les petites incidences ($k > -\frac{1}{3}$), indéterminées pour les incidences moyennes ($-1 < k < -\frac{1}{3}$), inexistantes pour les grandes incidences ($k < -1$).

L'interprétation physique de l'étude analytique est basée sur l'existence selon la loi de diffusion moléculaire, d'une région à évolution parabolique où les points hors du plan de symétrie peuvent influencer celui-ci. Lorsqu'en raison de l'incidence, les lignes de courant extérieures à la couche limite quittent latéralement la région d'influence, l'ensemble des équations et des conditions aux limites ne suffit à lui-même et des solutions peuvent être trouvées ; au contraire pour les incidences plus fortes, les lignes de courant extérieures pénètrent dans la région d'influence où elles apportent des informations nouvelles dont les équations du plan de symétrie ne peuvent tenir compte complètement.

Les conditions d'existence et d'unicité des solutions s'avèrant seulement nécessaires, Moore a alors proposé de caractériser la notion de fluide entrant et sortant de la région d'influence par les lignes de courant limite à la paroi beaucoup plus déviées que les lignes de courant extérieures, ce qui restreint aux très petites incidences le domaine de validité des équations de similitude au plan $\phi = \pi$.

Sans faire l'hypothèse de propriétés de transport constantes, Roux[9] dans son mémoire de thèse montre l'existence au plan $\phi = \pi$ de deux classes de solutions pour toutes les incidences inférieures à une certaine incidence critique ($\alpha_{cr} \sim 1°$, si $M_\infty = 7$ et $T_p/T_{oe} = 0,5$ pour ele cône de demi-angle $9°$). Dans le cas de propriétés de transport constantes, le critère de Moore situerait à $- 0,6°$ l'incidence à partir de laquelle la solution ne serait plus unique au plan $\phi = \pi$ alors que les calculs de Roux[10] montrent encore une double solution dès la mise en incidence.

Murdock[11] obtient des solutions très complètes qui se révèlent toujours être doubles pour les plans de symétrie $\phi = 0$ et $\phi = \pi$. Pour ce dernier plan, Murdock confirme les résultats de Roux pour les petites incidences et donne d'autres solutions dans le cas des incidences fortes ($-1 < k < -0,67$) ; lorsque la gamme d'incidence est telle que $-0,67 < k < -0,08$, aucune solution de similitude n'est trouvée. Dans le cas de propriétés de transfert variables avec la température, Wu et Libby[12] obtiennent des résultats analogues à ceux de Roux et Murdock et montrent l'existence d'une nouvelle famille de solution pour les incidences fortes ($-1 < k < -0,67$).

2.2. Etudes à deux variables indépendantes

Sous une forme voisine de celle proposée par Moore, les équations de la couche limite ont été intégrées à l'aide d'une méthode aux différences finies par Vvedenskaya[13] en se limitant au cas des incidences suffisamment inférieures au demi-angle au sommet du cône pour exclure la présence d'écoulement séparé. L'auteur discute la présence d'une singularité à l'approche du plan $\phi = \pi$, singularité qui serait liée à l'épaisseur de la couche limite lorsque l'incidence augmente et se manifesterait par des instabilités lorsque l'épaisseur de la couche limite est supérieure à une épaisseur critique.

Boericke[14], Roux[9] et Dwyer[15] ont aussi intégré les équations de similitude de la couche limite sur le cône en incidence par des méthodes aux différences finies, les écoulements extérieurs utilisés étant différents pour chacun de ces auteurs.

Les résultats obtenus, recoupent les résultats expérimentaux depuis le plan de symétrie $\phi = 0$ jusqu'à un azimut proche du plan de symétrie $\phi = \pi$ (ou proche de l'azimut de séparation) pour toutes les incidences essayées. Pour les incidences très faibles, inférieures à une certaine incidence critique des solutions uniques sont obtenues jusqu'au plan π tandis que

pour les incidences supérieures à i_{cr}, le comportement des solutions devient singulier et Boericke souligne que la connaissance de l'histoire antérieure de la couche limite n'a pas permis dans ce cas de progresser dans la détermination des solutions, ce qui ne concorde pas avec l'interprétation de zone d'influence de Moore.

En dédoublant le pas $\Delta\phi$ un grand nombre de fois à l'approche du plan $\phi = \pi$, Roux montre que la vitesse azimutale w tend vers une valeur finie. Ceci est physiquement impossible puisque au plan $\phi = \pi$, $\bar{w}$ doit être identiquement nul. Les résultats montrent également que les déviations des lignes de courant à la paroi restent différentes de zéro ainsi que les quantités $(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi})_{\phi=\pi}$ et $(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi})_{\phi=\pi}$ ce qui est aussi physiquement impossible. La confrontation des résultats théoriques et expérimentaux est bonne jusqu'à des azimuts très proches de $\phi = \pi$, en particulier le flux de chaleur convectée pariétal est conforme aux expériences de Tracy[16] jusqu'à l'azimut 175° pour les incidences comprises entre l'incidence critique et l'incidence de séparation.

En examinant avec précision les résultats numériques de Boericke, Murdock aboutit également à la conclusion que l'intégration des équations usuelles de la couche limite autour d'un cône prédit une vitesse finie au plan de symétrie $\phi = \pi$; si ce comportement ne peut être accepté Murdock signale que cela est explicable puisque les équations étant paraboliques en ϕ, aucune condition de symétrie ne peut être imposée au plan π pour corriger cette conduite. L'auteur suggère que des solutions réellement physiques devraient être obtenues en insérant une région limite au plan de symétrie .

Par contre, dans le cas d'un écoulement incompressible sur un ellipsoïde en incidence, Wang[17,18] a trouvé des solutions pour les équations de la couche limite de Prandtl dans le plan de symétrie le moins exposé au vent, en utilisant une méthode aux différences finies. Comme l'indique cet auteur le

calcul dans ce plan, indépendamment de la zone adjacente est alors rigoureusement justifié. Il faut remarquer cependant que, pour l'ellipsoïde, il existe un point d'arrêt unique dont sont issues toutes les lignes de courant pariétales et qu'en particulier, dans le plan $\phi = \pi$, il existe une ligne de courant régulière provenant de ce point d'arrêt, permettant de vérifier dans ce plan la règle de zone de dépendance énoncée par Wang . Ceci n'est pas le cas pour le cône pointu où la pointe constitue un point d'arrêt singulier.

2.3. Etudes à trois variables indépendantes

Pour traiter l'écoulement visqueux, notamment autour du cône, Lin et Rubin[7], puis Helliwell et Lubard[8] ont développé une technique de calcul en différences finies à trois variables indépendantes qui diffère des analyses précédentes par les points suivants :

- un problème à valeur initiale est formulé dans la direction x et la solution de l'écoulement dans le plan $\phi = 0$ pour une intégration en azimut n'est plus nécessaire.
- les équations directrices tiennent compte des effets des forces centrifuges dans le cas de grandes vitesses azimutales et des effets de diffusion latérales soit au demi-plan correspondant à l'azimut de séparation, soit au demi-plan $\phi = \pi$ en l'absence de séparation.

Les résultats théoriques sont obtenus quelque soit l'azimut pour toutes les incidences envisagées. Ceux-ci montrent en particulier au voisinage de $\phi = \pi$ une chute brutale de la pression Pitot et une croissance exponentielle de l'épaisseur de couche limite, qui sont en accord avec les expériences de Tracy[16].

Pour les incidences inférieures à 2° et supérieures à 10° (dans le cas du cône 10° avec $M_\infty = 7,95$ et $T_p/T_{oe} = 0,41$),

l'épaisseur de couche limite a une croissance de type parabolique qui caractérise les solutions de similitude ; pour les incidences comprises entre 2° et 8° telles que $-0,67 < k < -0,08$ l'épaisseur de couche limite varie comme $x^{0,8}$, donc cesse de croître de façon semblable précisément dans l'intervalle où les solutions de similitude n'ont pu être trouvées par les précédents auteurs.

Lin et Rubin ont testé l'importance des termes de diffusion transversales et montré que les solutions dans l'intervalle d'incidence de 4 à 8° cessent d'être stables au plan $\phi = \pi$ en l'absence de ces termes, qui s'avèrent finalement être indispensables pour adoucir et régulariser la croissance singulière de la couche limite. Pour l'incidence 2°, l'effet de ces termes est peu important. Les solutions obtenues sont en accord avec les résultats expérimentaux.

3. EQUATIONS DU MOUVEMENT

3.1. Equations de Navier Stokes

Pour un fluide visqueux compressible conducteur de la chaleur, et, si l'on néglige les forces de volume et la chaleur externe ajoutée, les équations de Navier-Stokes (Moore[19]) dans le cas stationnaire, s'écrivent en notation vectorielle :

- Equation de conservation de la masse

$$\mathrm{div}\ (\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$(\mathrm{grad}\ \mathbf{v})\bar{\rho}\ \mathbf{v} + \mathrm{grad}\ \bar{p} = \mathrm{grad}\ (\bar{\lambda}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}) + \mathrm{div}\ (\bar{\mu}\ (\mathrm{def}\ \mathbf{v}))$$

- Equation de conservation de l'énergie

$$(\mathrm{grad}\ \bar{h})\ .\ \bar{\rho}\mathbf{v} - (\mathrm{grad}\ \bar{p})\ \mathbf{v} = \mathrm{div}\ (\bar{k}\ \mathrm{grad}\ \bar{T}) + \Phi \qquad (3,1)$$

. Φ représente la dissipation d'énergie par unité de volume

$$\Phi = (\mathrm{div}\ \mathbf{v})^2 + \frac{\bar{\mu}}{2}\ (\mathrm{def}\ \mathbf{v})\ .\ (\mathrm{def}\ \mathbf{v})$$

. def $\mathbf{v}$ est le tenseur des déformations

. $\bar{h}$ est l'enthalpie par unité de masse

$\bar{h} = \bar{e} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ où $\bar{e}$ est l'énergie interne

Dans le système de coordonnées curvilignes correspondant au schéma de la figure 1, la définition et le développement des opérateurs utilisés sont donnés en annexe.

La forme finale obtenue est la suivante :

Equations de continuité

$$(\bar{\rho}\bar{u}r)_x + (\bar{\rho}\bar{v}r)_y \quad (\bar{\rho}\bar{W})_\phi = 0$$

Equations de quantité de mouvement

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{u}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{u}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{W}}{r}(\bar{u}_\phi - \sin\theta_c\bar{W}) + \bar{p}_x = \left[\frac{\bar{\lambda}}{r}(r\bar{u})_x + (r\bar{v})_y + \bar{W}_\phi\right]_x$$
$$+\frac{1}{r}\left[(2\bar{\mu}r\bar{u}_x)_x + \left(\bar{\mu}r(\bar{u}_y + \bar{v}_x)\right)_y + \left[\bar{\mu}\left(W_x + \frac{\bar{u}_\phi - \sin\theta_c\bar{W}}{r}\right)\right]_\phi - \frac{2\bar{\mu}\sin\theta_c}{r}(\bar{W}_\phi + \bar{u}\sin\theta_c + \bar{v}\cos\theta_c)\right]$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{v}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{v}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{W}}{r}(\bar{v}_\phi - \cos\theta\bar{W}) + \bar{p}_y = \left[\frac{\bar{\lambda}}{r}\left[(r\bar{u})_x + (r\bar{v})_y + \bar{W}_\phi\right]\right]_y$$
$$+\frac{1}{r}\left[\bar{\mu}r(\bar{u}_y + \bar{v}_x)\right]_x + (2\bar{\mu}r\bar{v}_y)_y + \left[\bar{\mu}\left(\bar{W}_y + \frac{\bar{v}_\phi - \cos\theta_c\bar{W}}{r}\right)\right]_\phi - \frac{2\bar{\mu}\cos\theta_c}{r}(\bar{W}_\phi + \bar{u}\sin\theta_c + \bar{v}\cos\theta_c)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{W}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{W}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{W}}{r}(\bar{W}_\phi + \bar{u}\sin\theta_c + \bar{v}\cos\theta_c) + \frac{\bar{p}_\phi}{r} = \frac{1}{r}\left[\frac{\bar{\lambda}}{r}\left[(r\bar{u})_x + (r\bar{v})_y \quad \bar{W}_\phi\right]\right]_\phi \tag{3.2.}$$
$$+\left[\bar{\mu}\left(\bar{W}_x + \frac{\bar{u}_\phi - \sin\theta\bar{W}}{r}\right)\right]_x + \left[\bar{\mu}\left(\bar{W}_y + \frac{\bar{v}_\phi - \cos\theta\bar{W}}{r}\right)\right]_y + \left[\frac{2\bar{\mu}}{r^2}(\bar{W}_\phi + \bar{u}\sin\theta_c + \bar{v}\cos\theta_c)\right]_\phi$$
$$+\frac{2\bar{\mu}\sin\theta_c}{r}\left(\bar{W}_x + \frac{\bar{u}_\phi - \sin\theta_c\bar{W}}{r}\right) + \frac{2\cos\theta_c}{r}\bar{\mu}\left(\bar{W}_y + \frac{\bar{v}_\phi - \cos\theta_c\bar{W}}{r}\right)$$

Equations de l'énergie

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{h}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{h}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{W}}{r}\bar{h}_\phi - (\bar{u}\bar{p}_x + \bar{v}\bar{p}_y + \frac{\bar{W}}{r}\bar{p}_\phi) = \frac{1}{r}\left[(r\bar{k}\bar{T}_x)_x + (r\bar{k}\bar{T}_y)_y + \left(\frac{\bar{k}}{r}\bar{T}_\phi\right)_\phi\right]$$
$$+\frac{\bar{\lambda}}{r^2}\left[(r\bar{u})_x + (r\bar{v})_y + \bar{W}_\phi\right]^2 + \frac{\bar{\mu}}{2}\left[(2\bar{u}_x)^2 + (2\bar{v}_y)^2 + \left[\frac{2}{r}(\bar{W}_\phi + \bar{u}\sin\theta_c + \bar{v}\cos\theta_c)\right]^2\right]$$
$$+\bar{\mu}\left[(\bar{u}_y + \bar{v}_x)^2 + \left(\bar{W}_x + \frac{\bar{u}_\phi - \sin\theta_c\bar{W}}{r}\right)^2 + \left(\bar{W}_y + \frac{\bar{v}_\phi - \cos\theta_c\bar{W}}{r}\right)^2\right]$$

3.2. Equations de l'écoulement de couche limite dans la région la moins exposée au vent

La simplification des équations de Navier Stokes opérée par l'analyse d'ordre de grandeur de Prandtl pour représenter l'écoulement visqueux autour du cône en incidence conduit à un système parabolique d'équations aux dérivées partielles qui, comme quelques auteurs[10,11,14] l'ont montré se trouve en défaut du côté du plan de symétrie le moins exposé au vent et ne permet pas en particulier d'y satisfaire les conditions de symétrie pour les variables $\bar{u}$, $\bar{T}$, $\bar{w}$ à savoir

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} = 0, \quad \bar{w} = 0 \qquad (3,3)$$

A propos des équations de couche limite, Schlichting[20] note que si de considérables simplifications des équations de Navier Stokes sont possibles lorsque la viscosité tend vers zéro, le passage à la limite correspondant est délicat. Si, en effet on se contente de poser $\bar{\nu} = 0$, on supprime toutes les dérivées de plus haut ordre et avec les équations d'ordre inférieur il devient impossible de satisfaire toutes les conditions aux limites ce qui signifie que les équations différentielles ont perdu leur réalité physique.

En s'appuyant sur cette argumentation, il parait clair que des termes de dérivée deuxième en ϕ doivent être utilisées pour tenir compte des conditions 3.3 ; ces termes proviennent de la diffusion visqueuse azimutale dont Lin et Rubin[7] soulignent l'importance au voisinage du demi-plan de séparation pour les incidences fortes et au voisinage du plan $\phi = \pi$ pour les incidences modérées.

Des résultats expérimentaux comme ceux de Tracy[16], montrent par ailleurs qu'un certain nombre de grandeurs physiques telles que l'épaisseur de couche limite et la pression Pitot, présentent de forts gradients à l'approche du plan π . En particulier, on observe pour la pression Pitot à des incidences

modérées de 4° à 8°, une décroissance rapide qui pourrait siginifier d'après Lin et Rubin[7] que certaines dérivées transversales seraient très grandes, et du même ordre de grandeur que les dérivées normales, c'est à dire

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} = O\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (3,4)$$

Pour simplifier les équations de Navier Stokes au voisinage du plan de symétrie $\phi = \pi$, dans le cas des incidences modérées, on utilisera l'analyse classique d'ordre de grandeur, avec l'hypothèse supplémentaire que les dérivées azimutales sont du même ordre que les dérivées normales et on éliminera par cette analyse tous les termes d'ordre δ, δ^2, etc.....

De plus, on supposera :

- Que le gaz est parfait, en équilibre thermodynamique (γ et C_p constants), et monoatomique ($\bar{\lambda} = -\frac{2}{3}\bar{\mu}$; relation de Stokes),

- Que l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est isentropique et conique ($p_x = 0$),

- Que les coefficients de viscosité et de conductivité thermique peuvent être exprimés en fonction de la température seulement.

Les équations tridimensionnelles de la couche limite à l'approche de $\phi = \pi$ s'écrivent alors :

$$(\bar{\rho}\bar{u}x)_x + x(\bar{\rho}\bar{v})_y + \frac{1}{\sin\theta_c}(\bar{\rho}\bar{w})_\phi = 0$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{u}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{u}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{w}}{x\sin\theta_c}\bar{u}_\phi - \bar{\rho}\frac{\bar{w}^2}{x} = (\mu u_y)_y + \frac{1}{x^2\sin^2\theta_c}(\bar{\mu}\bar{u}_\phi)_\phi$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\bar{w}_x + \bar{\rho}\bar{v}\bar{w}_y + \bar{\rho}\frac{\bar{w}}{x\sin\theta_c}\bar{w}_\phi + \bar{\rho}\frac{\bar{u}\bar{w}}{x} + \frac{1}{x\sin\theta_c}\bar{p}_\phi = (\bar{\mu}\bar{w}_y)_y + \frac{4}{3x^2\sin^2\theta_c}(\bar{\mu}\bar{w}_\phi)_\phi \qquad (3.5)$$

$$\bar{\rho}C_p\left[\bar{u}\bar{T}_x + \bar{v}\bar{T}_y + \frac{\bar{w}}{x\sin\theta_c}\bar{T}_\phi\right] - \frac{\bar{w}}{x\sin\theta_c}\bar{p}_\phi - \bar{\mu}(\bar{u}_y^2 + \bar{w}_y^2)$$

$$-\frac{1}{x^2\sin^2\theta_c}\left[\frac{4}{3}\bar{\mu}\bar{w}_\phi^2 + \bar{\mu}\bar{u}_\phi^2\right] = \left(\frac{\bar{\mu}C_p}{P_r}\bar{T}_y\right)_y + \frac{1}{x^2\sin^2\theta_c}\left(\frac{\bar{\mu}C_p}{P_r}\bar{T}_\phi\right)_\phi$$

<u>REMARQUE</u>

Dans le cas d'une couche limite classique, lorsque le rayon de courbure est supposé grand, $\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}$ est jugé d'ordre $\bar{\delta}$ et la variation de pression statique à travers la couche limite est négligée car d'ordre $\bar{\delta}^2$.

Avec l'hypothèse 3.4., le gradient de pression normale s'écrit à l'ordre 1 :

$$p_y = \rho\frac{\bar{w}^2}{r}\cos\theta_c - \left(\frac{2\bar{\mu}}{3r}\bar{w}_\phi\right)_\phi + \frac{1}{r}(\bar{\mu}\bar{w}_y)_\phi$$

La variation de pression dans la couche limite devient d'ordre $\bar{\delta}$ et peut donc encore être négligée.

3.3. Equations de quantité de mouvement azimutale dans la région la moins exposée au vent

Le système à trois variables indépendantes 3.5 demande pour sa résolution la mise en oeuvre de méthodes et de moyens calculs coûteux, aussi, supposera-t-on au voisinage du plan $\phi = \pi$, les solutions localement semblables, les solutions de similitude vraies devenant impossibles en raison de la présence des termes de diffusion azimutales. Les résultats numériques obtenus à partir du système parabolique de Prandtl étant cependant en bonne conformité avec l'expérience depuis l'azimut correspondant au plan le plus exposé au vent jusqu'à un azimut ϕ_{min} proche du plan $\phi = \pi$, il est donc justifié comme le remarquent Lin et Rubin[7] d'utiliser les solutions de similitude comme conditions limites au plan ϕ_{min} pour le nouveau système 3.5.

Ayant en vue de s'intéresser, seulement, dans le cadre limité de ce mémoire, au comportement de la vitesse $\bar{w}$, on considèrera que l'équation de quantité de mouvement azimutale est suffisamment représentative de cette variable et fera seule l'objet des calculs, les autres quantités $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{T}$ étant supposées connues.

Les grandeurs réelles $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{\mu}$ sont rendues adimensionnelles en posant :

$$\bar{u} = u\,\bar{u}_e \quad , \quad \bar{v} = v\,\bar{u}_e \quad , \quad \bar{w} = w\,\bar{u}_e \quad , \quad \bar{\rho} = \rho\,\bar{\rho}_e \quad , \quad \bar{\mu} = \mu\,\bar{\mu}_e$$

En éliminant les termes d'ordre δ, δ^2 etc.... provenant du terme de diffusion azimutale, l'équation de mouvement azimutale issue du système 3,5 s'écrit :

$$u\, w_x + v\, w_y + \frac{w\, w_\phi}{x \sin \theta_c} + \frac{(\bar{u}_e)}{\bar{u}_e} \frac{w^2}{x \sin \theta_c} + \frac{u\, w}{x} + \frac{1}{\rho\, x \sin \theta_c} \frac{p_\phi}{\bar{\rho}_e \bar{u}_e^2} -$$

$$\frac{\bar{\mu}_e}{\rho\, \bar{\rho}_e\, \bar{u}_e} (\mu w_y)_y + \frac{4}{3x^2 \sin^2 \theta_c} \frac{\mu\, \bar{\mu}_e}{\rho\, \rho_e\, \bar{u}_e} \left(w_{\phi\phi} + \frac{\mu_\phi}{\mu} w_\phi \right) \qquad (3,6)$$

Pour la recherche des solutions de similitude, on fait correspondre aux variables x, y, ϕ les variables x, η , ϕ où l'on choisit pour η la variable de Lees Dorodnicyn :

$$\eta = (Re)^{1/2}\, x^{-1/2} \int_0^y \rho\, dy$$

Les relations de passage correspondant au changement de coordonnées sont les suivantes :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,\phi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{y,\phi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\eta,\phi}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{x,\phi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{x,\phi} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{y,x} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \phi}\right)_{x,y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{\eta,x}$$

Pour simplifier l'écriture, on utilise :

- Les paramètres de Cooke[21], caractérisant l'écoulement extérieur

$$K' = \frac{\bar{w}_e}{\bar{u}_e} \; ; \quad L' = \frac{1}{\bar{u}_e \sin \theta_c} \frac{\bar{u}_e}{\partial \phi} \; ; \quad M' = \frac{1}{\bar{u}_e \sin \theta_c} \frac{\partial \bar{w}_e}{\partial \phi} \; ;$$

$$P' = \frac{1}{\bar{\rho}_e\, u_e\, \bar{w}_e \sin \theta_c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \phi} \qquad (3,7)$$

- La constante de Chapman-Rubesin :

$$C = \rho \mu$$

- La variable $\mathcal{V}$ utilisée par Roux[9] telle que :

$$\frac{\mathcal{V}}{x} = u\,\eta_x + v\,\eta_y + \frac{w}{x \sin \Theta_c}\,\eta_\phi$$

L'équation 3,6 s'écrit finalement :

$$\mathcal{V} w_\eta + \frac{w\ w_\phi}{\sin \Theta_c} + w\,(u + L'w) + K'P'T' =$$

$$(C\,w_\eta)_\eta + \frac{4\ CT^2}{3 \sin^2 \Theta_c\ Rex}\left[(w_\phi + w_\eta\,\eta_\phi)_\phi + (w_\phi + w_\eta\,\eta_\phi)_\eta\,\eta_\phi + \frac{\mu_\phi + \mu_\eta\,\eta_\phi}{\mu}\,(w_\phi + w_\eta\,\eta_\phi)\right] \qquad (3,8)$$

Lorsque le nombre de Reynolds Rex tend vers l'infini, le terme de diffusion azimutale est négligeable et les solutions de similitude peuvent exister de nouveau pourvu que la température de surface qui intervient dans les conditions aux limites soit invariante le long de chaque génératrice[9].

3.4. Nature mathématique de l'équation de quantité de mouvement azimutale

L'équation 3,7 qui appartient à la forme générale :

$$A w_{\eta\eta} + 2B\,w_{\eta\phi} + C\,w_{\phi\phi} + g(\eta, \phi, w, w_\eta, w_\phi) = 0$$

où les coefficients A, B, C sont fonction des seules variables η et ϕ et où g n'est pas nécessairement linéaire mais ne contient pas de dérivée seconde, est dite parabolique[22] si le déterminant $B^2 - AC$ est nul, elliptique si ce déterminant est négatif.

Le terme de dérivée croisée étant nul, l'équation de quantité de mouvement est donc elliptique ou parabolique suivant que le terme de diffusion azimutale est pris en compte ou négligé.

3.5. Conditions générales de calcul

3.5.1. Choix pour les quantités u, T, ϑ

Ne conserver que l'équation de quantité de mouvement azimutale dans le système 3,5 et éliminer à priori les équations de continuité, d'énergie et de quantité de mouvement longitudinale rev ient à considérer les variables u, T, ϑ comme connues dans tout le domaine de calcul. On choisit, ces grandeurs constantes dans la direction azimutale ; les données expérimentales, pour le transfert de chaleur notamment, au voisinage du plan de symétrie $\phi = \pi$ permettant de penser que ce choix est justifié, pour un intervalle de calcul entre les plans ϕ_{min} et $\phi = \pi$ suffisamment petit.

La vitesse longitudinale au plan ϕ_{min} est obtenue à partir des données du système de Prandtl. On pourrait faire de même pour la température mais, il est plus commode d'utiliser la relation de Crocco :

$$T = T_p + (T_{oe} - T_p)\, u - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\, u^2$$

Pour exprimer la variation de la viscosité en fonction de la température, on utilise la relation linéaire $\mu \sim T$ ce qui entraine $C = 1$, $\mu_\phi = 0$.

On choisit aussi $\vartheta = 0$, ce qui a l'avantage d'éliminer toute dérivée première en η ; on notera, toutefois, que la méthode numérique mise en oeuvre au chapitre 4 permet de tenir compte de cette dérivée.

3.5.2. Conditions limites

Le domaine de calcul est borné par la paroi du modèle et l'écoulement extérieur non visqueux dans la direction

normale, par la valeur arbitraire ϕ_{min} et le plan de symétrie $\phi = \pi$ dans la direction azimutale:

- à la paroi : $w = 0$

- à l'extérieur de la couche limite : $w = \frac{\overline{w}_e}{\overline{u}_e} = K'$

En considérant le paramètre M' comme constant au voisinage du plan de symétrie, on écrira :

$$K' = (M'_{\phi=\pi}) \sin \theta_c \, (\pi - \phi)$$

A l'extérieur de la couche limite les termes de viscosité doivent s'annuler, ce qui s'écrit :

$$P' = - (1 + M')$$

3.5.3. <u>Changement de variable en azimut</u>

Les expériences sur la couche limite laminaire pour un cône élancé dans un courant supersonique sont conduites à des nombres de Reynolds Rex compris généralement entre 10^5 et 10^6. Le terme de diffusion azimutale se trouve donc affecté par rapport au terme de diffusion normale d'un coefficient d'ordre 10^{-5}. Etant donné par ailleurs que l'intervalle de calcul envisagé ($\phi_{min} - \pi$) est petit, il semble naturel d'effectuer comme pour la direction normale une dilatation d'échelle dans la direction azimutale en posant :

$$\phi^* = \sin \theta_c \, (\tfrac{3}{4} \, Rex)^{1/2} \, \phi$$

Ce changement de variable revient à utiliser l'hypothèse 3,4 sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \phi^*} = O \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

3.5.4. Forme elliptique de l'équation de quantité de mouvement azimutale

Avec toutes les hypothèses simplificatrices, l'équation à résoudre s'écrit en variable $\frac{\bar{w}}{\bar{u}_e}$:

$$w_{\eta\eta} + T^2 w_{\phi^*\phi^*} = \left(\frac{3}{4}\,\mathrm{Rex}\right)^{1/2} w\, w_{\phi^*} + uw - (1 + M')\, K'T \qquad (3,9)$$

avec les conditions aux limites :

$\eta = 0$	$w = 0$	$\eta = \infty$	$w = K'$
$\phi = \phi_{min}$	$w = w_{\phi_{min}}$	$\phi = \pi$	$w = 0$

REMARQUE

Sous cette forme le terme de convection apparait comme étant d'ordre δ^{-1}, alors que tous les autres termes sont d'ordre 1. On aurait pu proposer un autre changement de variable pour ϕ qui aurait fait apparaitre formellement les termes de diffusion et de convection azimutale comme étant chacun à l'ordre δ^{-1}, les autres termes restant à l'ordre 1 ; ce deuxième changement de variable a conduit exactement aux mêmes valeurs numériques.

3.5.5. Forme parabolique de l'équation de mouvement azimutale

En l'absence de diffusion azimutale, l'ensemble équation-conditions aux limites s'écrit en variable $\bar{w}/\bar{u}_e$:

$$w_{\eta\eta} = \frac{w}{\sin\Theta_c}\, w_{\phi^*} + u\,w - (1 + M')\, K'T \qquad (3,10)$$

$\eta = 0$	$w = 0$	$\eta = \infty$	$w = K'$
$\phi = \phi_{min}$	$w = w_{min}$		

En variable $\bar{w}/\bar{w}_e$, l'on obtient :

$$w^*_{\eta\eta} = \frac{K' w^*}{\sin\Theta_c} w_\phi + w^* (u + M' w^*) - (1 + M')T$$

$\eta = 0$ $\quad w^* = 0$ $\quad \eta = \infty$ $\quad w^* = 1$

$\phi = \phi_{min}$ $\quad w^* = w^*_{\phi_{min}}$

4. RESOLUTION DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT AZIMUTALE

Après linéarisation l'équation de quantité de mouvement 3,9 appartient à la forme générale suivante :

$$- (\alpha u_{yy} + u_{xx}) = - Pu_x - Qu_y - Ru + S \qquad (4,1)$$

La résolution de cette équation peut être entreprise par différentes méthodes itératives dont les conditions de convergence seront étudiées et comparées plus loin. Les itérations spécifiques entrainées par la non linéarité de l'équation 3,9, seront prises en compte dans le processus itératif global ; les conditions de convergence dépendent alors de la variable elle-même.

4.1. Equation de Poisson

Pour la résolution de 4,1, on suit la formulation qu'Isaacson et Keller[23] ont proposée pour l'équation de Poisson :

$$- (u_{yy} + u_{xx}) = f \qquad (4,2)$$

Cette équation est liée au domaine D, lequel est délimité par la frontière C où sont fixées les conditions aux limites. Celles-ci doivent être continues sur le contour C pour que l'ensemble équation-conditions aux limites, constitue un problème "bien posé" et qu'alors la solution soit unique.

"Δ" représentant l'opérateur de Laplace, on écrit :

$$\begin{aligned} - \Delta u\ (x,y) &= f\ (x,y) \quad (x,y) \in D \\ u\ (x,y) &= g\ (x,y) \quad (x,y) \in C \end{aligned} \qquad (4,3)$$

Dans le but de transformer ce système, en un système d'équation aux différences, le domaine rectangulaire D est recouvert d'un réseau uniforme (fig. 2) où chaque point

est défini par les indices j et k :

$$x_j = x_{min} + j \quad dx$$
$$y_k = y_{min} + k \quad dy \qquad (4,4)$$

Les points intérieurs au domaine sont tels que :

$$1 \leq j \leq J \qquad ; \qquad 1 \leq k \leq K$$

Les points sur la frontière correspondent aux indices $j = 0$, $j = J + 1$, $k = 0$, $k = K + 1$ à l'exception des quatre coins.

A partir de développements en série de Taylor, la discrétisation des dérivées au point courant j, k s'écrit, si l'on utilise un schéma centré à cinq points :

$$u_{yy} = \frac{U_{j,k+1} + U_{j,k-1} - 2\,U_{j,k}}{dy^2} + O\,(dy^2)$$

$$u_{xx} = \frac{U_{j+1,k} + U_{j-1,k} - 2\,U_{j,k}}{dx^2} + O\,(dx^2)$$

$$u_y = \frac{U_{j,k+1} - U_{j,k-1}}{2\,dy} + O\,(dy^2) \qquad (4,5)$$

$$u_x = \frac{U_{j+1,k} - U_{j-1,k}}{2\,dx} + O\,(dx^2)$$

$$u = U_{j,k}$$

Posant

$$\delta^2 = \frac{dx^2 \quad dy^2}{2(dx2 + dy^2)}$$

$$\Theta_x \equiv \frac{dy^2}{2(dx^2 + dy^2)}$$

$$\Theta_y \equiv \frac{dx^2}{2(dx^2 + dy^2)} \qquad (4,6)$$

On obtient pour équations aux différences :

$$U_{j,k} - \Theta_x (U_{j-1,k} + U_{j+1,k}) - \Theta_y (U_{j,k-1} + U_{j,k+1}) = \delta^2 f_{j,k}$$

pour tout $1 \leq j \leq J$; $1 \leq k \leq K$ 4,7

Créant ensuite les vecteurs U_k tels que chaque composante d'indice k ait la dimension J et introduisant les matrices carrées, de dimension J, suivantes :

$$I_J \equiv \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \equiv (\delta_{ij})$$

$$L_J \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv (a_{ij});\ a_{ij} = \delta_{i-1,j} \qquad (4,8)$$

$$L_J^T \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \equiv (b_{ij});\ b_{i,j} = \delta_{i+1,j}$$

On obtient : $U_{j,k} \equiv I_J U_k$

$U_{j-1,k} \equiv L_J U_k + U_k^\circ$ où U_k° est le vecteur $\begin{bmatrix} U_{0,k} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$

(4,9)

$U_{j+1,k} \equiv L_J^T U_k + U_k^{J+1}$ où U_k^{J+1} est le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ U_{J+1k} \end{bmatrix}$

L'ensemble des équations aux différences devient avec les notations précédentes

$$\left[I_J - \Theta_x\,(L_J + L_J^T)\right] U_1 - \Theta_y\, U_2 = \delta^2\, f_1$$

$$+\ \Theta_x\,(U_1^\circ + U_1^{J+1}) + \Theta_y U_0 \equiv F_1$$

$$-\ \Theta_y U_{k-1} + \left[I_J - \Theta_x\,(L_J + L_J^T)\right] U_k - \Theta_y\, U_{k+1} = \delta^2\, f_k$$

$$+\ \Theta_x\,(U_k^\circ + U_k^{J+1}) \equiv F_k \qquad (4,10)$$

$$2 \leqslant k \leqslant K-1$$

$$-\ \Theta_y\, U_{K-1} + \left[I_J - \Theta_x\,(L_J + L_J^T)\right] U_K = \delta^2\, f_K$$

$$+\ \Theta_x\,(U_K^\circ + U_K^{J+1}) + \Theta_y U_{K+1} \equiv F_K$$

En introduisant le vecteur U de dimension $J.K$ et les matrices carrées de dimension $J.K$

$$I = (\delta_{ij})$$

$$L \equiv \begin{bmatrix} L_J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_J \end{bmatrix} \qquad B \equiv \begin{bmatrix} 0 & & \\ I_J & 0 & \\ 0 & I_J & 0 \end{bmatrix}$$

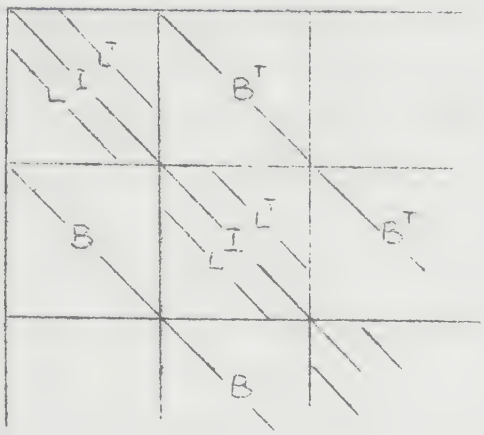
$$H = \Theta_x\,(L + L^T) \qquad V = \Theta_y\,(B + B^T) \qquad A = I - H - V$$

Le système 4,10 s'écrit finalement

$$A\,U = \delta^2\ F \qquad (4,11)$$

Chaque composante du vecteur U est ainsi associé à chaque point du réseau quadrillant le domaine D.

Dans le cas présent, la matrice A est pentadiagonale et tridiagonale par blocs suivant le schéma suivant :



(4,12)

Cette forme particulière résulte du choix fait pour l'ordre selon lequel les points du réseau et les composantes du vecteur U sont associés. Ici, la rième composante est obtenue par la relation :

$$r = j + (k - 1)J$$

ce qui signifie que les points du réseau sont numérotés de la gauche vers la droite, pour la première ligne k = 1, puis pour la ligne k = 2, 3 etc.....

4.2. Méthodes de résolution numérique

4.2.1. Méthodes itératives par points

La solution d'un système d'équation linéaire mis sous la forme Au = f est :

$u = A^{-1} f$ pourvu que A^{-1} soit non singulière

Si on envisage une résolution par itération, on pose par exemple comme l'indique Varga[24] :

A = D - E - F où D est la matrice contenant les éléments de la diagonale principale de A

E et F les matrices contenant respectivement les éléments en-dessous et en-dessus de la diagonale principale

Sous réserve que la matrice D ne soit pas singulière, on peut à partir d'une approximation représentée par le vecteur $u^{(o)}$, calculer successivement les vecteurs $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(m)}$ par la formule de récurrence, correspondant à la méthode de Jacobi par points :

$$D\, u^{(m+1)} = (E + F)\, u^{(m)} + f \qquad m = 0,1,2$$

Soit

$$u^{(m+1)} = D^{-1}\, (E + F)\, u^{(m)} + D^{-1}\, f \qquad (4,13)$$

Cette méthode itérative est la plus simple, mais présente l'inconvénient de nécessiter le maintien dans la mémoire de l'ordinateur de la totalité du vecteur $u^{(m)}$ pour le calcul du vecteur $u^{(m+1)}$.

Par contre, si chaque composante calculée à l'itération actuelle (qu'on désigne par m+1) est substituée à la composante de l'itération précédente pour les étapes ultérieures du calcul, on obtient une méthode de Gauss-Seidel par points qui s'écrit :

$$u^{(m+1)} = (D - E)^{-1}\, F\, u^{(m)} + (D - E)^{-1}\, f \qquad (4,14)$$

4.2.2. <u>Méthodes itératives par blocs</u>

Lorsque la matrice A est mise sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1K} \\ A_{k1} & A_{k2} & & A_{kK} \\ A_{K1} & A_{K2} & & A_{KK} \end{bmatrix}$$

où les A_{k1}, A_{k2} sont des sous-matrices d'ordre J

et lorsque les équations matricielles

$A_{1,1}\, u_1 = h_1$

$A_{2,2}\, u_2 = h_2$ etc....

peuvent être résolues directement pour u_1, u_2....(h_1, h_2..... étant connus) on peut constituer des méthodes de résolution itératives par blocs de Jacobi ou de Gauss Seidel. De plus, si chaque vecteur u_1, u_2..... u_k.... u_K est associé respectivement aux lignes 1,2..... k,K, d'un réseau, on parlera de méthode de Jacobi par ligne, ou de méthode de Gauss Seidel par ligne[23].

4.3. Convergence des méthodes itératives

Il existe un certain nombre de théorèmes généraux énoncés ou repris par Varga[24] qui permettent de définir dans certain cas les critères de convergence des méthodes itératives mises en oeuvre pour la résolution du problème matriciel :

$A\,u = f$ où A est une matrice n.n réelle ou complexe

En particulier, une condition suffisante pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel par points convergent, quel que soit le vecteur initial $u^{(o)}$ est que la matrice $A = a_{i,j}$ soit strictement à diagonale dominante, ce qui s'écrit :

$$\left|a_{i,i}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Pour étudier les taux de convergence des méthodes itératives Varga[24] propose de résoudre l'équation matricielle $Au = f$ en considérant la matrice A (matrice n.n non singulière) sous la forme :

$A = M - N$ où M et N sont aussi des matrices n.n

Si M est non singulière cette expression représente un "partage" de la matrice A auquel on peut associer une méthode itérative :

$$u^{(m+1)} = M^{-1}\,N\,u^{(m)} + M^{-1}\,f \qquad m \geqslant 0$$

Toutes les méthodes itératives peuvent être décrites de ce point de vue.

Avec l'objectif final de comparer les taux de convergence, on s'intéressera seulement aux matrices réelles $A = (a_{i,j})$ qui remplissent les conditions suivantes :

$$a_{i,i} > 0 \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (4,15(a))$$

$$a_{i,j} \leqslant 0 \quad \text{pour tout } i \neq j \qquad (4,15(b))$$

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \qquad (4,15(c))$$

Les trois conditions précédentes sont suffisantes pour que l'on ait $A^{-1} > 0$ et que A soit une M - matrice[24]. Si de plus, la matrice M est obtenue en annulant certains éléments hors de la diagonale principale de la matrice A (ce qui est le cas pour les partages de Jacobi et de Gauss Seidel) alors $A = M - N$ est un "partage régulier" de A et le rayon spectral $\rho(M^{-1} N)$ est inférieur à 1 ce qui signifie que la matrice $M^{-1} N$ est convergente et que la méthode itérative correspondante converge pour tout vecteur initial $u^{(o)}$.

Enfin pour deux partages réguliers $A = M_1 - N_1$ et $A = M_2 - N_2$ tels que $N_2 \geqslant N_1 \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$1 > \rho(M_2^{-1} N_2) > \rho(M_1^{-1} N_1) > 0 \qquad (4,16)$$

4.3.1. <u>Taux de convergence</u>

Si le taux de convergence est défini[23] comme étant $\mathbb{R} \equiv - \log \rho(M^{-1} N)$, l'inégalité précédente montre que les taux de convergence des méthodes de Jacobi est inférieur au taux de convergence des méthodes de Gauss-Seidel.

4.3.2. <u>Nombre d'itérations et Précision</u>

Le nombre d'itérations m requises, pour réduire l'erreur par un facteur $10^{-\varepsilon}$ au moins est la plus petite valeur

pour laquelle

$$\left[\rho\,(M^{-1}\,N)\right]^{m} \leqslant 10^{-\varepsilon}$$

soit

$$m \geqslant \frac{\varepsilon}{\mathbb{R}}$$

4.4. Equation elliptique à deux variables indépendantes

$$\begin{aligned} -\left[\alpha u_{yy} + u_{xx}\right] &= -Pu_x - Qu_y - Ru + S \qquad (x,y) \in D \\ u(x,y) &= g\,(x,y) \qquad (x,y) \in C \end{aligned} \tag{4,17}$$

Cette équation représente l'équation de quantité de mouvement azimutale linéarisée où les quantités α et R sont essentiellement positives et où les quantités P et Q peuvent être de signe quelconque.

L'écoulement a lieu dans le sens des y croissant dans le domaine formé :

- pour la variable x : par la paroi du modèle (x = 0 ou bien j = 0 et l'écoulement extérieur ($x = x_{Max}$ ou j = J +1)

- pour la variable y : par le plan origine normal à la paroi ($y = y_{min}$ ou bien k = 0) et par le plan de symétrie le moins exposé au vent ($y = y_{Max}$ ou k = K +1)

Suivant la formulation utilisée pour l'équation de Poisson, on pose :

$$\delta^2_{j,k} = \frac{dx^2\ dy^2}{2(\alpha^2_{j,k}\ dx^2+dy^2)} \quad ; \quad \Theta_{x(j,k)} = \frac{dy^2}{2(\alpha^2_{j,k}\ dx^2+dy^2)}$$

$$\Theta_{y(j,k)} = \frac{\alpha_{j,k}\ dx^2}{2(\alpha^2_{j,k}\ dx^2+dy^2)} \tag{4,18}$$

Pour la commodité on écrit :

$$\delta^2_{j,k} \equiv \delta^2 \quad , \quad \Theta_x \equiv \Theta_{x(j,k)} \quad , \quad \Theta_y \equiv \Theta_{y(j,k)} \quad \alpha \equiv \alpha_{j,k}$$

4.4.1. <u>Discrétisation utilisant des différences centrées</u>

En utilisant 4,5, l'équation 4,17 s'écrit :

$$- \frac{1}{\delta^2} \left[\Theta_y U_{j,k-1} + (\Theta_x U_{j-1,k} - U_{j,k} + \Theta_x U_{j+1,k}) + \Theta_y U_{j,k+1} \right] =$$

$$- P_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j-1,k}}{2\,dx} - Q_{j,k} \frac{U_{j,k+1} - U_{j,k-1}}{2\,dy} - R_{j,k} U_{j,k} + S_{j,k}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant J, \quad 1 \leqslant k \leqslant K$ (4,19a)

Désirant mettre 4,19 sous la forme 4,7, on pose :

$$\begin{aligned}
1 + \delta^2 R_{j,k} &= D_{j,k} \\
- \Theta_y - \frac{\delta^2}{2dy} Q_{j,k} &= - E_{j,k} \\
- \Theta_y + \frac{\delta^2}{2dy} Q_{j,k} &= - F_{j,k} \\
- \Theta_x - \frac{\delta^2}{2dx} P_{j,k} &= - B_{j,k} \\
- \Theta_x + \frac{\delta^2}{2dx} P_{j,k} &= - C_{j,k}
\end{aligned} \qquad (4,19b)$$

d'où

$$- E_{j,k} U_{j,k-1} - B_{j,k} U_{j-1,k} + D_{j,k} U_{j,k} - C_{j,k} U_{j+1,k} - F_{j,k} U_{j,k+1} = \delta^2 S_{j,k} \qquad (4,20)$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant J \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant K$

On forme les matrices carrées d'ordre J, D_J, B_J, C_J, E_J, F_J et comme pour l'équation de Poisson, on utilise les matrices carrées L_J, L_J^T ; on associe ensuite les composantes du vecteur U_k à tous les points d'une même ligne k de telle sorte que :

$$D_{j,k}\, U_{j,k} \equiv D_J U_k$$

$$B_{j,k}\, U_{j-1,k} \equiv B_J L_J U_k + U_k^o$$

$$C_{j,k}\, U_{j+1,k} \equiv C_J L_J^T U_k + U_k^{J+1}$$

$$E_{j,k}\, U_{j,k-1} \equiv E_J U_{k-1}$$

$$F_{j,k}\, U_{j,k+1} \equiv F_J U_{k+1}$$

L'ensemble des équations aux différences 4,20 s'écrit alors :

$$(D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_1 - F_J U_2 = \delta^2 S_1 + B_J U_1^o + C_J U_1^{J+1} + E_J U_o$$

$$- E_J U_{k-1} + (D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_k - F_J U_{k+1} = \delta^2 S_k + B_J U_k^o + C_J U_k^{J+1} \qquad (4,21)$$

pour tout $2 \leq k \leq K - 1$

$$- E_J U_{K-1} + (D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_K = \delta^2 S_K + B_J U_K^o + C_J U_K^{J+1} + F_J U_{K+1}$$

En appelant D la matrice d'ordre J.K constituée par les K sous-matrices D_J et en appelant B, C, D, E, F les matrices constituées à partir de B_J, C_J, E_J, F_J, les équations 4,23, peuvent être mises sous la forme :

$$A\, U = S \qquad (4,22)$$

où $\quad A = D - B - C - E - F$

Si les coefficients de $A(A = (a_{i,j}))$ satisfont les conditions 4,15, alors les "partages" correspondant aux méthodes de Jacobi et Gauss Seidel, par points et par blocs sont réguliers, ils s'écrivent respectivement :

$M_1 = D$ $\qquad N_1 = B + C + E + F$ (Jacobi par points)

$M_2 = D - B - E$ $\qquad N_2 = C + F$ (Gauss Seidel par points)

$M_3 = D - B - C$ $\qquad N_3 = E + F$ (Jacobi par blocs)

$M_4 = D - B - C - E$ $\qquad N_4 = F$ (Gauss Seidel par blocs)

En vertu des inégalités 4,16, la méthode de Gauss Seidel par blocs ou par lignes a le plus petit rayon spectral et donc la plus grande rapidité de convergence. Elle sera donc préférée à toutes les autres. Pour le système d'équations 4,21 cette méthode s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\left[D_J - B_J - L_J - C_J L_J^T\right] U_1^{(m+1)} - F_J U_2^{(m)} = \delta^2 S_1 + B_J U_1^o + C_J U_1^{J+1} + E_J U_o \\
-E_J U_{k+1}^{(m+1)} + &\left[D_J - B_J - L_J - C_J L_J^T\right] U_k^{(m+1)} - F_J U_{k+1}^{(m)} = \delta^2 S_k + B_J U_k^o + C_J U_k^{J+1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \leqslant k \leqslant K-1 \qquad (4,23) \\
-E_J U_{K-1}^{(m+1)} + &\left[D_J - B_J - L_J - C_J L_J^T\right] U_K^{(m+1)} = \delta^2 S_K + B_J U_K^o + C_J U_K^{J+1} + F_J U_{K+1}
\end{aligned}$$

Si le système ci-dessus représente l'équation de quantité de mouvement 3,9, l'élément non linéaire du terme de convection représenté par le vecteur U_k intervient dans les coefficients E_J et F_J où il sera pris à l'itération (m).

4.4.2. Conditions de convergence

A chaque point j,k du réseau de discrétisation correspond une composante de U et , les éléments de A qui interviennent dans le calcul de cette composante sont les coefficients $E_{j,k}$, $B_{j,k}$, $D_{j,k}$, $C_{j,k}$, $F_{j,k}$ tels que ceux introduits dans les équations (4,20).

Les conditions suffisantes de convergence 4,15 seront écrites en fonction de ces coefficients comme suit :

$$D_{j,k} > 0 \qquad (4,24(a))$$

$$E_{j,k} \geq 0 \qquad B_{j,k} \geq 0 \qquad C_{j,k} \geq 0 \qquad F_{j,k} \geq 0 \qquad (4,24(b))$$

$$\left|D_{j,k}\right| \geq \left|E_{j,k}\right| + \left|B_{j,k}\right| + \left|C_{j,k}\right| + \left|F_{j,k}\right| \qquad (4,24(c))$$

Pour une discrétisation centrée, telle que 4,5 :

- La condition 4,24(a) s'écrit : $1 + \delta^2 R_{j,k} > 0$, cette condition est toujours vérifiée puisque $R_{j,k}$ est positif.
- Les inégalités 4,24(b) deviennent, quelque soit le signe de P et Q :

$$\left|\frac{2\alpha}{Q_{j,k}}\right| > dy \qquad \left|\frac{2}{P_{j,k}}\right| > dx \qquad (4,25)$$

- La condition de dominance diagonale stricte s'écrit :

$$\left|1 + \delta^2 R_{j,k}\right| > \left|\Theta_y + \frac{\delta^2}{2dy} Q_{j,k}\right| + \left|\Theta_y - \frac{\delta^2}{2dy} Q_{j,k}\right| + \left|\Theta_x + \frac{\delta^2}{2dx} P_{j,k}\right| + \left|\Theta_x - \frac{\delta^2}{2dx} P_{j,k}\right|$$

soit $\delta^2 R_{j,k} > 0$ toujours vérifié

On peut remarquer que chacune des conditions 4,25 porte sur le rapport des dérivées secondes et premières comparé à la taille du pas dans la direction correspondante.

Plusieurs auteurs ont signalé des instabilités de calcul liées à l'utilisation de schémas aux différences centrées pour les dérivées premières .

Pour des problèmes à valeurs initiales dans le cas des équations d'Euler unidimensionnelles Richtmyer et Morton[25], citant Lelevier, montrent que la stabilité ne peut

être assurée dans certain cas que si l'on utilise pour le terme $u\ \partial p/\partial x$ des schémas aux différences décentrées vers l'avant ou vers l'arrière suivant que le signe de u est négatif ou positif.

Pour des problèmes à conditions limites, dans le cas de la résolution d'équations elliptiques à deux dimensions (équations de Navier-Stokes), Runchal, Spalding et Wolfshtein[26] préconisent aussi l'utilisation de schémas décentrés lors de la discrétisation des termes de convection, afin d'assurer la convergence même lorsque le nombre de Reynolds devient grand. L'argumentation physique pour justifier cette façon de faire étant que sueles les valeurs amont doivent servir au calcul du point courant.

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel avec couche limite, Peyret[27] signale des difficultés de convergence lorsque le produit du nombre de Reynolds et du pas devient trop grand et utilise aussi un schéma de discrétisation décentré pour les dérivées convectives.

Enfin, Krause[28] indique que ce problème est analogue à celui des instabilités causées par les termes d'ordre inférieur (convection) lors de l'étude des couches limites tridimensionnelles. La stabilité des calculs n'est obtenue que si le schéma aux différences est directionnel de telle sorte que la condition de Courant soit aussi satisfaite pour les subcaractéristiques.

4.4.3. Discrétisation utilisant des différences décentrées pour les dérivées premières

On examine, sur les conditions 4,24(b) l'effet de l'utilisation de schémas décentrés pour la discrétisation des dérivées u_x et u_y, en utilisant les discrétisations :

$$u_y = \frac{U_{j,k}-U_{j,k-1}}{dy} + O\ (dy) \qquad \text{lorsque } Q > 0, \text{ et :}$$

$$u_x = \frac{U_{j,k}-U_{j-1,k}}{dx} + O\ (dx) \qquad \text{lorsque } P > 0 \qquad (4,26)$$

Le système 4,21 s'écrit :

$$- \frac{1}{\delta^2} \left[\Theta_y U_{j,k-1} + (\Theta_x U_{j-1,k} - U_{j,k} + \Theta_x U_{j+1,k}) + \Theta_y U_{j,k+1} \right] =$$

$$- P_{j,k} \frac{U_{j,k} - U_{j-1,k}}{dx} - Q_{j,k} \frac{U_{j,k} - U_{j,k-1}}{dy} - R_{j,k} U_{j,k} + S_{j,k} \qquad (4,27)$$

$$1 \leqslant j \leqslant J \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant K$$

Les équations aux différences gardent la même forme 4,20 qu'en schéma centré, mais les coefficients utilisés deviennent :

$$D_{j,k} = 1 + \delta^2 R_{j,k} + \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k} + \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k}$$

$$- E_{j,k} = - \Theta_y - \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k}$$

$$- F_{j,k} = - \Theta_y \qquad (4,28)$$

$$- B_{j,k} = - \Theta_x - \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k}$$

$$- C_{j,k} = - \Theta_x$$

- La condition 4,24(a)

$$1 + \delta^2 R_{j,k} + \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k} + \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k} > 0$$

est toujours vérifiée, $R_{j,k}$, $Q_{j,k}$, $P_{j,k}$ étant positifs

- Les conditions 4,24(b) sont aussi toujours vérifiées :

$$\Theta_y + \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k} > 0 \quad ; \quad \Theta_y > 0 \quad ; \quad \Theta_x + \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k} > 0 \; ; \; \Theta_x > 0$$

- De la même façon qu'en schéma centré, la condition 4,24(c) se ramène à $\delta^2 R_{j,k} > 0$ et est toujours vérifiée.

La méthode de Gauss Seidel par ligne pour un schéma décentré arrière à 5 points est donc inconditionnellement stable. La précision est plus faible que pour un schéma centré puisque les dérivées premières sont obtenues en négligeant des termes d'ordre dy au lieu de termes d'ordre dy^2.

En utilisant les discrétisations

$$u_y = \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{dy} + O\,(dy) \text{ lorsque } Q < 0, \text{ et}$$

$$u_x = \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{dx} + O\,(dx) \text{ lorsque } P < 0$$

Le schéma de Gauss Seidel par ligne est aussi inconditionnellement stable.

4.5. Equation parabolique à deux variables indépendantes

L'équation 3,10 linéarisée est de la forme générale :

$$- u_{xx} = - P\, u_x - Q\, u_y - R\, u + S \qquad (x,y) \in D$$

$$R > 0$$

$$U(x,y) = g(x,y) \qquad (x,y) \in C \qquad (4,29)$$

Les expressions 4,18 deviennent avec $\alpha \equiv 0$

$$\delta^2 = \frac{dx^2}{2} \quad , \quad \Theta_x = \frac{1}{2} \quad , \quad \Theta_y = 0 \qquad (4,30)$$

Etant données les interprétations physiques sur le sens de propagation des perturbations habituellement attachées à la nature parabolique d'une équation, on ne peut proposer un schéma de discrétisation centrée de type 4,5 pour la dérivée u_y. D'ailleurs, les conditions 4,24(b) obtenues pour Q ne peuvent être simultanément vérifiées avec un tel schéma et ceci permet de remarquer que dans le cas d'une équation parabolique dans

la direction y, c'est la condition issue de cette direction qui ne peut jamais être vérifiée.

Si $P > 0$ et $Q > 0$, on utilise pour les dérivées premières u_x et u_y, les schémas décentrés arrières 4,26.

En faisant $\alpha \equiv 0$, les systèmes 4,27 et 4,28 deviennent :

$$- \frac{1}{\delta^2} \left[\Theta_x U_{j-1,k} - U_{j,k} + \Theta_x U_{j+1,k} \right] =$$

$$- P_{j,k} \frac{U_{j,k}-U_{j-1,k}}{dx} - Q_{j,k} \frac{U_{j,k}-U_{j,k-1}}{dy} - R_{j,k} U_{j,k} - S_{j,k} \qquad (4,31)$$

$$1 \leqslant j \leqslant J \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant K$$

$$D_{j,k} = 1 + \delta^2 R_{j,k} + \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k} + \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k}$$

$$- E_{j,k} = - \frac{\delta^2}{dy} Q_{j,k}$$

$$- F_{j,k} = 0 \qquad (4,32)$$

$$- B_{j,k} = \Theta_x - \frac{\delta^2}{dx} P_{j,k}$$

$$- C_{j,k} = - \Theta_x$$

Les conditions de convergence 4,24 sont satisfaites et les équations aux différences d'écrivent :

$$(D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_k = \delta^2 S_1 + b\, U_1^o + C_J U_1^{J+1} + E_J U_o$$

$$- E_J U_{k-1} + (D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_k = \delta^2 S_k + B_J U_k^o + C_J U_k^{J+1} \qquad (4,33)$$

$$2 \leqslant k \leqslant K - 1$$

$$- E_J U_{K-1} + (D_J - B_J L_J - C_J L_J^T) U_K = \delta^2 S_K + B_J U_K^o + C_J U_K^{J+1}$$

Le système 4,33 est totalement implicite et aucune itération globale sur l'ensemble des lignes du réseau n'est nécessaire ; la solution peut être trouvée pour chaque ligne successivement sans itération. Si un ou tous les coefficients P, Q, R comportent le vecteur inconnu U_k, c'est à dire si l'équation 4,29 est en fait seulement quasi-linéaire (cas de l'équation 3,10) des itérations sont nécessaires pour calculer chaque ligne successivement en fonction de la précédente.

5. RESULTATS

Pour le cône de demi-angle au sommet 9° ayant une température de paroi de 300°K, les calculs ont été effectués pour les incidences inférieures à 7°, en deça de l'incidence de séparation. L'écoulement à l'infini amont est caractérisé par une température génératrice de 600°K et un nombre de Mach égal à 7.

Les données de l'écoulement extérieur issues des tables de Jones[29] sont les suivantes :

i	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
M'	0,11061	0,23491	0,37406	0,52831	0,69842	0,88783	1,09912
T_p/T_e	3,95410	4,03990	4,11960	4,19020	4,24940	4,29410	4,32270
T_{oe}/T_e	7,90806	8,07978	8,23924	8,38039	8,49871	8,58813	8,64540
M_e	5,88710	5,54970	6,01633	6,07470	6,12320	6,15960	6,18280

5.1. Cas parabolique

Les calculs, dans le cas parabolique, sont effectués pour comparer le comportement de la vitesse azimutale obtenue à partir de l'équation de quantité de mouvement 3,10 à celui obtenu par le système complet de Prandtl. De plus, les solutions paraboliques dans l'intervalle compris entre l'azimut ϕ_{min} et le plan de symétrie $\phi = \pi$ seront des solutions limites pour les solutions elliptiques, qui tendent asymptotiquement vers elles, lorsque le nombre de Reynolds, Rex, tend vers l'infini.

5.1.1. Comportement de la variable w

Avec un intervalle $180° - \phi_{min} = 5°625$, une taille de pas de 0°1758, une précision demandée de 10^{-6}, les calculs ont convergé pour toutes les incidences comprises entre 1° et 7°. L'évolution de la vitesse azimutale (fig. 3) montre que la condition de symétrie $w \equiv 0$ au plan $\phi = \pi$ est obtenue pour l'incidence 1°, alors que pour toutes les incidences supérieures, on obtient des valeurs de w finies mais non nulles. De la même façon, dans le cas du système complet [10,30], les déviations des lignes de courant limites à la paroi pour un écoulement extérieur comparable ne satisfont la condition de symétrie, que pour des incidences peu supérieures à 1°.

Sur la figure 4, ont été tracées pour les incidences de 1°, 3° et 5°, les variations en fonction de l'azimut des quantités wK', calculées à partir du système de Prandtl, et w calculée à partir de l'équation 3,10 ; l'écart, dans le cas le plus défavorable du graphique ($i = 5°$, $\phi \sim \pi$) ne dépasse pas 7 % et ceci assure, semble-t-il, que malgré les nombreuses simplifications utilisées, l'équation azimutale seule, reste bien significative.

Pour l'intervalle $180° - \phi_{min} = 11°25$, le même pas et la même précision demandée, les calculs ont été effectués à l'incidence unique de 5°. Dans ce cas, lorsque $\phi = 174°375$, la valeur de w à $\eta = 1$ calculée avec l'équation de mouvement transversale seule est de 0,050905 au lieu de 0,049177 lorsqu'elle est calculée par le système de Prandtl soit un écart inférieur à 4 %.

Influence de la taille du pas

Dans l'intervalle 174°375, 180° les calculs ont été opérés à l'incidence 3°, en utilisant successivement 16,32 et 64 lignes de calcul dans la direction azimutale ; les solutions obtenues sont peu sensibles au dédoublement de la taille du pas comme le montrent les valeurs ci-après prises à $\eta = 1$.

Solutions paraboliques en w

$(180° - \phi)$	$\Delta\phi = 0°3516$	$\Delta\phi = 0°1758$	$\Delta\phi = 0°0879$
1°7578	.01615	.01620	.01623
1°4062	.01513	.01519	.01522
1°0547	.01407	.01414	.01418
0°7031	.01297	.01305	.01309
0°3516	.01182	.01191	.01196
0°	.01060	.01072	.01077

5.1.2. Comportement de la variable w^*

Pour la même incidence de 3°, les calculs de l'équation 3,11 ont été effectués avec 16,32 et 64 lignes de calcul. Les solutions à chaque ligne dépendent fortement de la taille du pas et cela d'autant plus qu'on s'approche du plan $\phi = \pi$, où la convergence n'a pu être obtenue (fig. 5).

Les calculs antérieurs du système de Prandtl effectués avec cette même variable w^* , notamment les calculs de Roux[10], n'avaient pas permis d'atteindre le plan de symétrie, mais du moins, en dédoublant le pas un grand nombre de fois l'évolution de la vitesse azimutale s'était montrée régulière jusqu'au plan $\pi - \Delta\phi$.

Ainsi dans le cas de l'incidence 3°, le plan 179°912 avait été atteint avec une taille de pas $\Delta\phi$ = 0°088 , qui correspond ici à 64 lignes de calcul. Le mauvais comportement de la variable w^* peut donc être imputé au schéma de discrétisation 4,26 moins précis que le schéma de Crank-Nicolson utilisé par Roux.

Au moins dans le cas parabolique et à l'approche de $\phi = \pi$, la variable w ne doit pas être utilisée ; puisque $\bar{w}_e$ tend vers zéro tandis que $\bar{w}$ reste différent de zéro, la variable w^* devient très grande et le calcul numérique ne converge plus en raison de l'importance des erreurs de troncature. La variable w doit être préférée, puisqu'elle permet une bonne précision avec un nombre de lignes de l'ordre de 60 au plus.

5.2. Cas elliptique

5.2.1. Stabilité des solutions

Pour une équation elliptique linéaire de type 4,1, il a été possible de montrer à partir des théorèmes généraux de Varga[24], que la méthode de calcul itérative de Gauss Seidel par ligne est convergente de façon inconditionnelle, si l'on utilise un schéma de discrétisation décentré des dérivées premières, et, convergente de façon conditionnelle seulement si l'on utilise un schéma de discrétisation centré.

Dans le cas traité ici, de l'équation de quantité de mouvement azimutale, la stabilité des calculs apparait bien liée au schéma de discrétisation utilisé et l'on peut considérer que les conditions de convergence 4,25, sont restées valables malgré la non linéarité.

Pour une incidence de 5°, un intervalle d'intégration dans le sens azimutal $180° - \phi_{min}$ = 5°625 et un pas de 0°3516 les calculs numériques utilisant un schéma décentré vers l'amont sont stables et convergents à la précision requise de 10^{-4}, pour tous les nombres de Reynolds essayés compris entre 10^4 et 10^7.

Dans les mêmes conditions, et avec la même précision demandée, les calculs utilisant un schéma centré ne sont stables que si le nombre de Reynolds ne dépasse pas $0{,}38\ 10^6$. Pour un nombre de Reynolds supérieur, les valeurs numériques obtenues oscillent en s'amplifiant dès les premières itérations et la convergence n'est jamais obtenue. Les nombres d'itérations nécessaires pour obtenir des solutions stables avec des schémas de discrétisation centrée et décentrée sont comparées, figure 6, pour différents Rex. Lorsque Rex est voisin de 10^4, la rapidité des deux schémas est la même, mais à partir d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^5 le schéma centré est un peu plus rapide et l'avantage qu'il présente s'accroît jusqu'à ce qu'il cesse de converger. Si l'on désire néanmoins obtenir des solutions au-delà de la valeur $0{,}38\ 10^6$ il est nécessaire de diminuer la taille du pas. Ainsi pour une taille de pas de 0°1758 la valeur du nombre de Reynolds limite s'accroît jusque $0{,}62\ 10^6$ mais le nombre d'itérations est multiplié par un facteur 3 environ, auquel cas le schéma décentré redevient nettement plus rapide.

La comparaison entre les deux schémas de discrétisation faite, figure 7, pour un intervalle d'intégration de 11°25, peut faire l'objet des mêmes remarques ; par rapport à l'intervalle 5°625 on constate dans les deux cas une augmentation du nombre d'itérations nécessaires à la convergence.

La rapidité de convergence diminue donc avec le nombre de lignes dans la direction azimutale et croît avec le pas $\Delta\phi^*$, dans le sens indiqué par l'expression donnée par Isaacson et Keller[23] pour le rayon de convergence d'une méthode de Jacobi par lignes, dans le cas de l'équation de Laplace :

$$R_{LJ} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{(K+1)^2} + \frac{\Delta\phi^{*2}}{(J+1)^2 \Delta\eta^2} \right)$$

5.2.2. Critère de convergence

Pour l'équation de quantité de mouvement 3,9, la condition de convergence 4,25 s'écrit :

$$(Rex)_{MAX} < \left\{ \frac{8T^2}{3 \sin \Theta_c \; w \; \Delta\phi} \right\}_{MIN} \qquad (5,1)$$

Pour un intervalle $(\pi - \phi_{MIN})$ et une taille de pas $\Delta\phi$ fixés, la valeur maximale de Rex est réalisée pour la valeur minimale de la quantité $\frac{T^2}{w^* K'}$, qu'il est possible d'obtenir dans le domaine d'intégration. Dans la direction azimutale cette quantité est minimale sur la borne ϕ_{min} puisque w décroît constamment et que T est constant.

Dans le plan $\phi = \phi_{min}$, les solutions paraboliques de Prandtl utilisées sont telles que le rapport $\frac{T^2}{w^* K'}$, qui est infini à la paroi ($\eta = 0$) et est une fonction uniformément décroissante de η, tend asymptotiquement vers une valeur minimale obtenue à $\eta = \eta_{max}$, où $T = 1$ et $w^* = 1$. En notant de plus que :

$$(K')_{\phi_{MIN}} \sim |M'_{\phi=\pi}| \; |\pi - \phi_{MIN}| \; \sin \Theta_c$$

Il vient :

$$(Rex)_{MAX} < \frac{8}{3 \; |M'_{\phi=\pi}| \; \sin^2 \Theta_c \Delta\phi \; |\pi - \phi_{MIN}|} \qquad (5,2)$$

De même que la limite pratique cette limite théorique à la convergence dépend donc, à une incidence donnée du pas et de l'intervalle $(\pi - \phi_{MIN})$ choisis, il n'y a pourtant pas coincidence et la valeur limite pratique du nombre de Reynolds est toujours supérieure à la v aleur limite théorique.

$(180° - \phi_{MIN})$	11°25	5°625	5°625
$\Delta\phi$	0°3516	0°3516	0°1758
Rex limite théorique	$0,130\ 10^6$	$0,260\ 10^6$	$0,520\ 10^6$
Rex limite pratique	$0,155\ 10^6$	$0,380\ 10^6$	$0,620\ 10^6$

5.2.3. Validité physique des solutions

Dans le domaine d'intégration rectangulaire considéré, avec les conditions aux limites définies et continues sur la frontière du domaine, les solutions de l'équation elliptique peuvent être jugées numériquement satisfaisantes, pour autant qu'elles sont stables et convergentes. Il reste à vérifier qu'elles répondent à un certain nombre d'exigences physiques :

- Dans la direction normale à la paroi du modèle, les profils de vitesse obtenus doivent être de type couche limite comme le profil initial imposé au plan ϕ_{min}. Les courbes de la figure 8 à l'incidence 5°, montrent, qu'avec la valeur η_{max} choisie, il en est bien ainsi.

- Dans la direction azimutale, les solutions elliptiques doivent se raccorder sans discontinuité aux solutions paraboliques issues du système de Prandtl. Dans le cas présent, on comparera simplement les solutions elliptiques et paraboliques de l'équation de mouvement azimutale au voisinage du plan ϕ_{min}.

Les profils obtenus, pour les schémas centré et décentré (figures 9 et 10) à l'incidence 5° et pour l'intervalle $180° - \phi_{min} = 5°625$ s'inscrivent bien entre la courbe limite

parabolique correspondant à Rex = ∞ et la courbe limite elliptique* rectiligne qui semble apparaitre numériquement lorsque Rex tend vers zéro. Les solutions elliptiques s'approchent de la solution parabolique d'autant plus que le nombre de Reynolds s'accroît.

Pour le schéma décentré, on peut constater à la précision permise par le graphique qu'à l'azimut $\phi_{min} = 174°375$, les pentes des solutions paraboliques et elliptiques sont sensiblement confondues depuis Rex = 10^7 jusqu'à Rex = $0,3\ 10^6$. En-dessous de cette dernière valeur, les pentes sont nettement différentes et l'on peut dire qualitativement que le raccordement de la solution elliptique avec la solution parabolique n'est pas satisfaisant. Pour les nombres de Reynolds inférieurs à $0,3\ 10^6$ environ, l'intervalle de calcul choisi à priori doit être jugé insuffisant et les calculs repris pour un intervalle plus grand. Les profils correspondant à l'intervalle $180° - \phi_{min} = 11°25$ sont donnés sur la figure 11, où le raccordement des solutions parabolique et elliptique peut être estimé valable jusqu'à un nombre de Reynolds de $0,15\ 10^6$.

Lorsque le nombre de Reynolds tend vers zero, l'équation 3,9 s'écrit :

$$w_{\eta\eta} + T^2 w_{\phi^*\phi^*} = u\,w - (1 + M')K'T$$

Cette équation admet une solution analytique de la forme :

$$w = -(\pi - \phi)\sin\theta_c\, a(\eta)$$

Lorsque l'équation différentielle :

$$a_{\eta\eta} = a\,u - (1+M')\,TM'$$

admet elle-aussi une solution

Pour le schéma centré, on constate cette fois que le raccordement à la précision graphique, des solutions paraboliques et elliptiques n'est pas satisfaisant, sauf pour les nombres de Reynolds proches de 0,38 10^6 valeur à partir de laquelle il n'y a plus convergence. Ceci pourrait indiquer que le schéma centré cesse précisément de converger, lorsque le nombre de Reynolds est tel que le raccordement des deux solutions devient satisfaisant, c'est-à-dire, tel que la solution au voisinage de ϕ_{min} commence à se comporter comme la solution parabolique à la précision fixée par le pas de calcul.

5.2.4. Interprétation physique du critère de convergence

Lorsque l'équation caractéristique d'un système d'équations comme celles de Navier-Stokes, contient des termes de différentes natures, elliptiques et autres, Wang[31] précise que le terme elliptique doit être dominant. L'argumentation physique utilisée est, (si on l'applique au cas particulier de l'équation de quantité de mouvement 3,9), que la perturbation elliptique transmise par diffusion domine par nature la perturbation parabolique transmise par convection et qu'en conséquence une perturbation qui prend son origine en un point quelconque affecte instantanément tout le champ d'écoulement. Par contre en l'absence de terme de diffusion azimutale (équation de couche limite classique) une perturbation de nature parabolique ne peut se propager que dans le sens des lignes de courant, d'amont en aval.

Lorsqu'on discrétise l'équation de quantité de mouvement 3,9 à l'aide d'un schéma centré, la quantité avale utilisée pour le calcul du point courant provient à la fois des termes elliptique et parabolique. La condition de stabilité 4,25, dans le cas d'un schéma centré, exprime que la quantité avale doit être telle que le terme de diffusion doit être supérieur au terme de convection, ce qui rejoint bien la façon de voir de Wang sur la prédominance des termes de caractère elliptique.

Que la méthode de résolution utilisant un schéma centré de converger, parait donc être la manifestation que le caractère elliptique de l'équation ne domine plus, sur la ligne la plus proche du plan ϕ_{min} tout au moins, puisque c'est sur celle-ci que le critère 4,25 cesse d'être vérifié.

Dans ce cas, on pourra dire que, pour la valeur du nombre de Reynolds juste inférieure au nombre de Reynolds limite le raccordement est bon, c'est-à-dire que la différence entre solutions elliptique et parabolique est juste supérieure à un écart limite qui dépend de la précision générale du calcul ; cet écart est d'autant plus petit que la précision augmente comme le montrent les valeurs numériques ci-dessous (variable w ; incidence 5°, $\eta = 1$) :

$(180° - \phi)$	Solutions paraboliques	Solutions elliptiques en schéma centré	
		$\phi = 0°3516$ $(Rex)_{lim}=0,38\ 10^6$	$\phi = 0°1758$ $(Rex)_{lim}=0,62\ 10^6$
5°6250	.049177	.049177	.049177
5°4492	.048755		.048749
5°2734	.048330	.048297	.048317
5°0576	.047901		.047881
4°9219	.047468	.047395	.047442
4°7461	.047031		.046998
4°5703	.046591	.046464	.046551

5.2.5. Etendue du domaine d'influence de la diffusion azimutale

5.2.5.1. Effet d'abscisse

Pour déterminer à incidence fixée, l'étendue de la zone où le terme de diffusion azimutale à un effet non négligeable, la façon la plus simple est d'évaluer l'écart relatif de la solution elliptique à la solution parabolique, c'est-à-dire $\frac{w_P - w_E}{w_P}$. A l'azimut ϕ_E, pour lequel cet écart relatif est d'un ordre de grandeur équivalent à celui de la précision de mesure standard, soit par exemple 1 %, on dira que le domaine de diffusion azimutale a une étendue angulaire $\pi - \phi_E$.

Cet écart relatif est évalué, à $\eta = 1$ et $i = 5°$, à partir des résultats obtenus en schéma décentré pour des nombres de Reynolds compris entre $0{,}15\ 10^6$ et 10^7. On a tracé sur la figure 12, pour les intervalles de calcul de 11°25 et 5°625, les courbes donnant Log Rex en fonction de Log $\frac{\pi - \phi_E}{\Delta\phi}$

Les droites respectivement obtenues pour chacun de ces deux intervalles ont même pente et montrent que le produit $(\pi - \phi_E)Rex^{0,55}$ est sensiblement constant ce qui signifierait que la largeur du domaine intéressée par la diffusion azimutale, $l = x \sin \theta_c(\pi - \phi_E)$ aurait une évolution sensiblement parabolique en $x^{0,5}$.

5.2.5.2. Effet d'incidence

Les calculs ont été effectués pour les incidences 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7°. Les tracés des figures 13 et 14 correspondent aux incidences 3° et 7°. Les évaluations des écarts aux solutions paraboliques définies comme au paragraphe précédent, montreraient pour un nombre de Reynolds Rex donné, que l'étendue du domaine de diffusion azimutale diminue régulièrement depuis l'incidence 7° jusqu'à l'incidence 1°. Les expériences, notamment celles de Marcillat[9][30] ne semblent pas indiquer un tel comportement de la zone limite au voisinage du plan $\phi = \pi$.

En effet, à nombre de Reynolds fixé, le film d'huile à la surface du cône montre une zone d'étendue légèrement croissante avec l'incidence où la trace des lignes de courant limite est très estompée : ceci peut être interprété comme une atténuation du frottement à la paroi donc un épaississement de la couche limite correspondant à l'existence possible d'une zone limite où la diffusion visqueuse azimutale prend de l'importance.

5.2.5.3. Cas des petites incidences

Pour l'incidence 1°, (fig. 15), les solutions elliptiques diffèrent de la solution parabolique ce qui indiquerait un effet de la diffusion azimutale, alors qu'il est admis[10] que les solutions du système parabolique classique sont valables jusqu'au plan de symétrie $\phi = \pi$, quand on se limite aux petites incidences.

Les résultats de Roux[31] montrent par ailleurs dans le cas des faibles valeurs du paramètre $|M'|$ inférieures à $|M'_{cr}|$ que des solutions au plan de symétrie lui même peuvent être obtenues pour la variable $\tilde{w} = \frac{1}{\sin \Theta_c} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)_{\phi=\pi}$ par le système

$$\vartheta = -\frac{3}{2} u - \tilde{w} \qquad (5,3)$$

$$(C\, u_\eta)_\eta = \vartheta\, u_\eta \qquad (5,4)$$

$$(C\, \tilde{w}_\eta)_\eta = \vartheta\, \tilde{w}_\eta + \tilde{w}\,(u + \tilde{w}) - (1 + M')M'T \qquad (5,5)$$

$$\left(\frac{C}{Pr}\, T_\eta\right) = \vartheta\, T_\eta - C\,(\gamma - 1)\, M_e^2\, u_\eta^2 \qquad (5,6)$$

avec les conditions limites

$u = v = \tilde{w} = 0,\ T_p = \bar{T}_p/\bar{T}o_e$ lorsque $\eta = 0$

$u \to 1,\ \tilde{w} \to 0,\ T \to 1$ lorsque $\eta \to \infty$

Si l'on ne choisit plus de faire la simplification $\vartheta = 0$ et si l'on cherche pour l'équation parabolique issue de 3,8 ou pour l'équation 3,8 elle-même, au voisinage de $\phi = \pi$, une solution de la forme $w = -(\pi - \phi)\, \tilde{w} \sin \Theta_c$, on obtient identiquement l'équation 5,5. Si pour résoudre cette équation seule, on introduit des profils de u, v, T obtenus par la résolution

du système 5,3 à 5,6, il est clair que l'équation 5,5 aura des solutions pour les mêmes valeurs du paramètre M' que le système 5,3-5,6. Pour les faibles valeurs de M' , les solutions existent au plan de symétrie lui-même et les équations de quantité de mouvement azimutale sous forme elliptique ou sous forme parabolique admettent au voisinage du plan de symétrie la même solution $w = -(\pi - \phi)(\frac{\partial w}{\partial \phi})_{\phi=\pi}$. L'étendue du domaine d'influence de la diffusion azimutale à l'incidence 1° est donc nulle, ce qui permet d'affirmer qu'il y a bien accroissement de la zone d'influence avec l'incidence, comme le laisse supposer les expériences.

Au plan ϕ_{min}, il faudrait raccorder les solutions du système parabolique de Prandtl avec de nouvelles solutions elliptiques issues du système 3,5 et, on peut dire que la condition limite $w_{\phi min}$ contient un certain arbitraire pour l'équation de mouvement transversale seule. Il y a donc une "ellipticité" induite par cette condition limite qui peut expliquer les résultats erronés de la figure 15.

5.2.6. Précision des calculs

5.2.6.1. Influence de la taille du pas

Les calculs ont été effectués en simple précision en schéma centré et décentré, à l'incidence 5° et pour un intervalle de 5°625 en utilisant successivement 15, 31 et 63 lignes de calculs dans la direction azimutale, la taille du pas dans la direction normale restant constante et égale à 0,5.

Lorsque l'écart relatif entre deux solutions obtenues à deux itérations successives est inférieur à une grandeur fixée à l'avance, 10^{-4} dans le cas présent, la convergence est considérée comme atteinte. Pour un nombre de Reynolds de $0{,}38\ 10^6$ et lorsqu'on utilise 15, 31 et 63 lignes de calculs, la convergence est obtenue respectivement après 73, 234 et 715 itérations dans le cas d'un schéma centré et 86, 254 et 742 itérations dans le cas d'un schéma décentré.

Les solutions varient très peu avec la taille du pas en schéma centré et l'on pourrait estimer que celle obtenue avec 15 lignes de calculs est suffisamment précise. Dans le cas décentré au contraire l'influence de la taille du pas est importante, ce qui s'explique par la précision différente des deux schémas considérés dont les erreurs de troncature seront précisées au paragraphe suivant. Le tableau ci-dessous montre que les solutions centrées et décentrées tendent bien l'une vers l'autre lorsque la taille du pas diminue.

	"Solutions centrées"			"Solutions décentrées"		
$(180°-\phi)$	$\Delta\phi=0°3516$	$\Delta\phi=0°1758$	$\Delta\phi=0°0879$	$\Delta\phi=0°3516$	$\Delta\phi=0°1758$	$\Delta\phi=0°0879$
1°4062	.03002	.02985	.02999	.02783	.02875	.02946
1°3184			.02880			.02826
1°2305		.02738	.02752		.02626	.02697
1°1426			.02614			.02560
1°0547	.02472	.02454	.02467	.02255	.02343	.02413
0°9668			.02309			.02256
0°8789		.02129	.02141		.02026	.02090
0°7910			.01963			.01915
0°7031	.01782	.01765	.01775	.01602	.01673	.01730

5.2.6.2. Erreurs de troncature

La discrétisation de l'équation 3,9 faite à partir de développements en série de Taylor, permet d'évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature.

En choisissant d'exprimer celle-ci en fonction du pas $\Delta\phi^*$ (ce choix étant motivé par les résultats du paragraphe 5.2.7.) on obtient suivant que la dérivée première convective est discrétisée de façon centrée ou décentrée :

$$\tau_{centré} = O\left\{ \left|\Delta\phi^{*2} \frac{\partial^4 w}{\partial\phi^{*4}}\right| + \left|\Delta\eta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial\phi^{*4}}\right| + \left|w\, Rex^{0,5} \Delta\phi^{*2} \frac{\partial^3 w}{\partial\phi^{*3}}\right| \right\}$$

(diffusion azimutale) (diffusion normale) (convection)

$$\tau_{décentré} = O\left\{ \left|\Delta\phi^{*2} \frac{\partial^4 w}{\partial\phi^{*4}}\right| + \left|\Delta\eta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial\phi^{*4}}\right| + \left|w\, Rex^{0,5} \Delta\phi^{*} \frac{\partial^2 w}{\partial\phi^{*2}}\right| \right\}$$

Avec cette formulation, l'erreur de troncature du terme de convection apparait d'ordre $Rex^{0,5}\ \Delta\phi^{*2}$ ou $Rex^{0,5}\ \Delta\phi^{*}$, si $\frac{\partial^3 w}{\partial\phi^{*3}}$ ou $\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^{*2}}$ est d'ordre 1.

A propos de la résolution d'équations de Navier Stokes pour les grands nombres de Reynolds, Dorodnicyn[33], note que l'erreur de troncature pour les termes non linéaires est en général de l'ordre de Rex.h (h = $\Delta\eta$ ou $\Delta\phi$) ou $Rex.h^2$ suivant que l'on utilise un schéma centré ou décentré, quand l'ordre de grandeur du terme de viscosité principal est supposé être d'ordre 1. La quantité Rex.h ou $Rex.h^2$ correspond à une"viscosité mathématique" qui doit rester très inférieure à la viscosité réelle pour que les résultats numériques conservent une signification. Le pas utilisé doit donc être d'autant plus petit que le nombre de Reynolds est grand, de telle sorte que $Rex.h^2$ reste inférieur, par exemple, à 0,1. Cela peut conduire rapidement à une taille de problème prohibitive même pour les ordinateurs de grande capacité.

Dans le cas présent, "le domaine d'ellipticité" ($\pi - \phi_E$) est une fonction décroissante de Rex (fig. 10 et 12) et lorsque les calculs sont effectués, en maintenant $\Delta\phi$ et ($\pi - \phi_{min}$)

constants, il est clair que la zone où la courbure est la plus forte est décrite avec un nombre de ligne d'autant plus petit que le nombre de Reynolds est grand, donc, avec une précision qui diminue.

Dans la mesure où on désire maintenir le calcul de la "zone d'ellipticité" avec une précision plus constante, il est nécessaire d'accroitre le nombre de lignes de calcul avec le nombre de Reynolds, mais alors, dans la zone avale parabolique l'exigence de précision sera inutilement croissant de même que l'encombrement en mémoire de l'ordinateur. Par contre, si on connait approximativement, les étendues $(\pi - \phi_E)$, celles-ci pourront être décrites avec des nombres de lignes identiques quelque soit Rex. De plus, si on admet d'après le paragraphe 5.2.5.1. que $(\pi - \phi_E)Rex^{0,5}$ reste constant, on peut essayer d'effectuer les calculs en gardant le pas transformé $\Delta\phi^*$ constant.

5.2.7. Calculs à $\Delta\phi^*$ constant

Avec $\Delta\phi^* = 0,4239$ les calculs ont été conduits en schéma centré (fig. 18) pour des nombres de Reynolds de $0,065\ 10^6$, $0,260\ 10^6$ et $0,460\ 10^6$ correspondant aux intervalles 11°25, 5°625 et 4°219 de telle sorte que chaque domaine soit décrit avec un nombre de lignes identique et égal à 15.

On constate, qu'en fonction du nombre de Reynolds, la diminution du nombre d'itérations requis pour la convergence est moins accentuée que pour les calculs effectués à $\Delta\phi$ constant

	$\Delta\phi$ = 0°3516		$\Delta\phi^*$ = 0,4239
	schéma centré	schéma décentré	schéma centré
Rex=0,065 10^6	166	166	120
Rex=0,260 10^6	100	110	100
Rex=0,462 10^6		74	87

Si les solutions sont tracées de telle sorte que l'unité d'échelle dans la direction azimutale soit représentative de $\Delta\phi^*$ et que les ordonnées à l'origine soient ramenées à la même valeur, on obtient, figure 19, une nouvelle représentation montrant que les différences de courbure entre les trois cas envisagés ont été beaucoup atténuées. On peut donc considérer à posteriori qu'il est plus satisfaisant de conduire les calculs en maintenant $\Delta\phi^*$ constant plutôt que $\Delta\phi$.

Pour chercher à connaitre à partir du critère de convergence 5,2 la façon dont varie en fonction de l'abscisse l'étendue $(\pi - \varphi_E)$ où la diffusion azimutale est dominante, il faut que cette estimation puisse se faire en considérant la précision des calculs comme indépendante du nombre de Reynolds. Lorsqu'on maintient $\Delta\phi^*$ constant, on approche autant qu'il est possible de cette condition et le critère 5,2 peut s'écrire (pour des nombres de Reynolds voisins des nombres de Reynolds limite) :

$$\left|\pi - \phi_{MIN}\right| \; Rex^{0,5} \sim \frac{8}{3 \left|M'_{\phi=\pi}\right| \sin^2\theta_c \; \Delta\phi^*}$$

Cette façon d'interpréter le critère permet de renforcer, semble-t-il, l'estimation faite, au paragraphe 5.2.5.1. , pour l'étendue du domaine d'influence de la diffusion azimutale.

6. CONCLUSION

L'étude décrite ici est consacrée au problème de l'indétermination ou de la non signification physique des solutions de couche limite usuelles au plan de symétrie le moins exposé au vent d'un cône circulaire en incidence, placé dans un courant supersonique.

La méthode proposée consiste à développer de façon complète le système d'équations de Navier Stokes et à chercher à utiliser des termes qui permettent de satisfaire les conditions de symétrie au plan $\phi = \pi$, conditions qui ne sont pas respectées par les solutions de Prandtl, même si celles-ci existent encore et aussi près que l'on veut du plan le moins exposé au vent. Ces termes dont Lin et Rubin[7] ont souligné l'importance, correspondent à la diffusion visqueuse azimutale qu'on peut valablement supposer non négligeable au voisinage du plan de symétrie en raison de forces de frottement nouvelles qui prennent naissance, lorsque les écoulements provenant de chaque côté du cône, ont tendance à s'interpénétrer.

Le calcul numérique de l'équation de quantité de mouvement azimutal sous forme parabolique, montre, lorsque l'incidence de séparation n'est pas atteinte, que la vitesse azimutale reste finie et non nulle au plan $\phi = \pi$ pour toutes les incidences essayées à l'exception des très petites, de la même façon que le système de Prandtl, ce qui permet d'estimer que cette équation de mouvement seule est bien représentative du problème.

En présence de termes de diffusion visqueuse qui font intervenir explicitement le nombre de Reynolds et si l'on fait l'hypothèse de similitude locale, la vitesse azimutale est représentée par une équation elliptique à deux variables indépendantes. La discrétisation conduit à un système algébrique linéarisé dont la résolution numérique peut présenter un caractère instable.

En considérant d'un point de vue théorique à partir des théorèmes de Varga[24] la convergence de différentes

méthodes itératives qui peuvent être proposées, la méthode de Gauss Seidel par ligne apparait la plus rapide ; il s'avère aussi que la convergence de cette méthode n'est que conditionnelle si l'on discrétise de façon centrée la dérivée première convective, et inconditionnelle si la discrétisation est décentrée vers l'avant ou vers l'arrière suivant le signe de la vitesse azimutale. Dans le premier cas, le critère algébrique donne un nombre de Reynolds limite en deça duquel des solutions peuvent toujours être obtenues, les calculs divergent effectivement peu au delà de cette valeur limite.

En utilisant une discrétisation décentrée, des solutions elliptiques sont obtenues quelque soit le nombre de Reynolds jusqu'au plan le moins exposé au vent où la vitesse transversale w devient strictement nulle. Lorsque le nombre de Reynolds s'accroit, les solutions paraboliques apparaissent comme une limite asymptotique des solutions elliptiques ; la continuité du raccordement entre les deux types de solutions resté difficile à apprécier de façon nette. Néanmoins, si l'on se fixe une grandeur arbitraire à laquelle on compare l'écart relatif entre la solution parabolique et la solution elliptique, on peut admettre semble-t-il à une incidence donnée, que la largeur de la zone où la diffusion visqueuse azimutale manifeste un certain effet, a une croissance de type parabolique. Par contre, en fonction de l'incidence, cette façon de faire conduit à une évolution de la zone de diffusion azimutale décroissante avec l'incidence, ce qui n'est pas confirmé par les visualisations pariétales[30] effectuées par la méthode du film d'huile. Dans ce cas, il serait nécessaire, éventuellement, de définir la zone de diffusion transversale à partir d'une quantité intégrale analogue aux épaisseurs de couche limite et de déplacement classique.

Une difficulté particulière au type d'équation traité ici, est que l'erreur de troncature, et donc la précision dépendent du nombre de Reynolds choisi. Il apparait qu'une façon convenable d'atténuer cet effet soit d'effectuer les calculs en gardant constant le nombre de lignes dans la zone de diffusion

azimutale ainsi que la taille du pas transformé $\Delta\phi^*$. Le critère de convergence en schéma centré indique alors qussi que l'étendue de la région limite le long de la génératrice la moins exposée au vent, évolue en $x^{0,5}$.

Pour obtenir des solutions sur toute la surface du cône, la méthode qui consiste à tenter le raccordement de solutions paraboliques amont avec des solutions elliptiques avales s'avère praticable. De plus, par rapport à une méthode qui traiterait l'équation elliptique depuis l'azimut $\phi = 0$ jusqu'à l'azimut $\phi = \pi$, cette façon de faire est certainement beaucoup moins coûteuse en temps d'ordinateur, puisque les équations paraboliques se calculent pas à pas alors que les équations elliptiques nécessitent des itérations globales pour l'ensemble des points du réseau de discrétisation.

ANNEXE

Définitions des opérateurs utilisés dans le système d'équations 3,1

1. Système quelconque de coordonnées curvilignes orthogonales (Cf. Moore[19])

Les composantes du vecteur déplacement infinitésimal PQ sont $h_i dx_i$. Le carré de la longueur ds de PQ est :

$$(ds)^2 = \sum_i (h_i \, dx_i)^2 \qquad (1,1)$$

- gradient d'un scalaire f

$$\text{grad } f = \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (1,2)$$

- si $\mathbf{v} = (V_i)$, le tenseur grad $\mathbf{v}$ a pour composantes $V_{i,j}$:

$$V_{i,i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \sum_{k \neq i} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \frac{V_k}{h_i}$$

$$V_{i,j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{V_j}{h_j} \quad \text{pour } i \neq j \qquad (1,3)$$

- Divergence du vecteur $\mathbf{v}$:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \quad \frac{\partial (h_2 h_3 V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 V_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_3)}{\partial x_3} \qquad (1,4)$$

- la divergence du tenseur A est un vecteur dont les composantes sont :

$$(\text{div } A)_i = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{A_{ij} \, h_1 h_2 h_3}{h_i h_j}\right) + \sum_j \frac{\partial h_i}{h_j \, \partial x_j} \frac{A_{ij} + A_{ji}}{h_i} - \sum_j \frac{\partial h_j}{h_i \, \partial x_i} \frac{A_{jj}}{h_j} \qquad (1,5)$$

- le produit interne de deux tenseurs est un scalaire :

$$A \cdot B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

le produit $A \cdot A$ s'écrit :

$$\sum_i \sum_j (A_{ii} + A_{ij})(A_{ii} + A_{ij}) = \sum_i (A_{ii})^2 + \sum_{j \neq i} (A_{ij})^2 \qquad (1,6)$$

- le tenseur déformation def $\mathbf{v}$ est défini comme le tenseur symmétrique :

$$\text{def } \mathbf{v} = \text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^* \qquad (1,7)$$

$(\text{grad } \mathbf{v})^*$ est le tenseur transposé de grad $\mathbf{v}$

2. <u>Système de coordonnées orthogonales x, y, ϕ relatif au cône en incidence</u> (fig. 1)

Les éléments h_1, h_2 s'écrivent :

$$h_1 = h_2 = 1$$

$$(h_1)_x = (h_1)_y = (h_1)_\phi = 0 \quad ; \quad (h_2)_x = (h_2)_y = (h_2)_\phi = 0$$

On pose $r = h_3$ avec $r = x \sin \Theta_c + y \cos \Theta_c$, d'où :

$$(r)_x = \sin \Theta_c \quad ; \quad (r)_y = \cos \Theta_c$$

les expressions du paragraphe précédent se développent de la façon suivante :

- métrique :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2 \, d\phi^2 \qquad (2,1)$$

- composantes du vecteur grad f :

$$\begin{matrix} (f)_x \\ (f)_y \\ \frac{1}{r} \; (f)_\phi \end{matrix} \qquad (2,2)$$

- composantes du tenseur grad **v** :

$$(V_1)_x \quad ; \quad (V_1)_y \quad ; \quad \frac{(V_1)_\phi - \sin\Theta_c V_3}{r}$$

$$(V_2)_x \quad ; \quad (V_2)_y \quad ; \quad \frac{(V_2)_\phi - \cos\Theta_c V_3}{r} \qquad (2,3)$$

$$(V_3)_x \quad ; \quad (V_3)_y \quad ; \quad \frac{(V_3)_\phi + V_1 \sin\Theta_c + V_2 \cos\Theta_c}{r}$$

- divergence du vecteur **v** :

$$\frac{1}{r} \left| (r\,V_1)_x + (r\,V_2)_y + (V_3)_\phi \right. \qquad (2,4)$$

- composantes de la divergence du tenseur A

$$\frac{1}{r} \left| (A_{11}r)_x + (A_{12}r)_y + (A_{13})_\phi + \sin\Theta_c A_{33} \right.$$

$$\frac{1}{r} \left| (A_{21}r)_x + (A_{22}r)_y + (A_{23})_\phi - \cos\Theta_c A_{33} \right. \qquad (2,5)$$

$$(A_{31})_x + (A_{32})_y + \left(\frac{A_{33}}{r}\right)_\phi + \frac{\sin\Theta_c}{r}(A_{31}+A_{13}) + \cos\Theta_c(A_{32}+A_{23})$$

- produit interne du tenseur A par lui-même

$$(A_{11})^2 + (A_{22})^2 + (A_{33})^2 + (A_{12})^2 + (A_{13})^2 + (A_{21})^2 + (A_{23})^2 + (A_{31})^2 + (A_{32})^2 \qquad (2,6)$$

- composante du tenseur def **v** :

$$2(V_1)_x \quad ; \quad (V_1)_y + (V_2)_x \quad ; \quad (V_3)_x + \frac{(V_1)_\phi - \sin\Theta_c V_3}{r}$$

$$(V_1)_y + (V_2)_x \quad ; \quad 2(V_2)_y \quad ; \quad (V_3)_y + \frac{(V_2)_\phi - \cos\Theta_c V_3}{r}$$

$$(V_3)_x + \frac{(V_1)_\phi - \sin\Theta_c V_3}{r} \quad ; \quad (V_3)_y + \frac{(V_2)_\phi - \cos\Theta_c V_3}{r} \quad ; \quad \frac{2(V_3)_\phi + 2V_1\sin\Theta_c + 2V_2\cos\Theta_c}{r}$$

(2,7)

Vu et Permis d'imprimer

Marseille, Le 5 Juin 1974

Le Président,

F. BOREL

REFERENCES

1. VALENSI J., GUFFROY D., MARCILLAT J. et ROUX B.
Effet de l'incidence et du nombre de Reynolds sur l'écoulement hypersonique autour d'un cône circulaire
La recherche Aéro. n° 128, Janvier 1969, pp. 17-32

2. MARCILLAT J.
Etude expérimentale du sillage proche d'un cône élancé en incidence à $M_\infty = 7$
Thèse de Doctorat d'Etat, Juillet 1970

3. ROUX B. et REY J.F.
Sur le calcul de la couche limite laminaire dans le plan de symétrie d'un cône de révolution en incidence
C.R.A.S. A 270, 616-619, 1970

4. HAYES W.D.
The three dimensional boundary layer
Navord Report 1313 NOTS 384, 1951

5. MOORE F.K.
Laminar boundary layer on a circular cone in supersonic flow at small angle of attack
NACA TN 2521, 1951

6. MOORE F.K.
Laminar boundary layer on cone in supersonic flow at large angle of attack
NACA TR 1132, 1953

7. LIN T.C. et RUBIN S.G.
Viscous flow over a cone at moderate incidence
II Supersonic boundary layer
J. Fluid Mechanics, vol. 59, part 3, 1973, pp. 593-620

8. HELLIWELL W.S. et LUBARD S.C.
An implicit method for three dimensional viscous flow with application to cones at angle of attack
Aerospace Report n° TR 0074 (4450-64)-1, Sept. 1973

9. ROUX B.
Etude théorique de la couche limite laminaire sur un cône circulaire en incidence dans un courant supersonique
Thèse de Doctorat d'Etat, Juin 1971

10. ROUX B.
Etude théorique de l'effet d'incidence sur la couche limite laminaire autour d'un cône circulaire placé dans un courant supersonique - Solutions auto semblables
Journal de Mécanique, Vol. 10 n° 4, Décembre 1971,pp. 467-502

11. MURDOCK W.
The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 54, part 4, pp. 665-678, 1972

12. WU P. et LIBBY P.A.
Laminar boundary layer on a cone near a plane of symmetry
A.I.A.A. Journal, Vol. 11, n° 3, pp. 326-333, 1973

13. VVEDENSKAYA N.D.
Calculation of the boundary layer arising in flow about a cone under an angle of attack
USSR Comp. Math. and Math. Phys., Vol. 6 n° 2, 1966, pp.149-161

14. BOERICKE R.R.
The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flow
A.I.A.A. Journal, Vol. 9, n° 3, March 1971, pp. 462-468

15. DWYER H.A.
Boundary layer on a hypersonic sharp cone at small angle of attack
A.I. A.A. Journal, Vol. 9, n° 2, 1971, pp. 277-284

16. TRACY R.R.
Hypersonic flow over a yawed circular cone
GALCIT memo n° 69 Pasadena Californie, Août 1963

17. WANG K.C.
Three dimensional laminar boundary layer over body of revolution at incidence
Part III Solutions near the plane of symmetry
R.I.A.S. TR 69-14, 1969

18. WANG K.C.
Three dimensional laminar boundary layer over body of revolution at incidence
Part IV Separation Pattern
R.I.A.S. TR 70-07, 1970

19. MOORE F.K.
Theory of laminar flows
High speed aerodynamics and jet propulsion Vol. IV
Princeton University Press, 1964, pp. 26-62

20. SCHLICHTING H.
Boundary layer theory
Mac Graw Hill, 1968, pp. 73-75

21. COOKE J.C.
An axially symmetric analysis for general three dimensional boundary layers
R.A.E. TN Aero 2625, 1959

22. COURANT R. and HILBERT D.
Volumme II Partial differential equations
Intersceince Publishers, 1962, pp. 173-174

23. ISAACSON E. and KELLER H.B.
Analysis of numerical method
John Wiley and Sons, 1966, pp. 442-475

24. VARGA R.S.
Matrix iterative analysis
Prentice-Hall Inc, 1963, pp. 56-96

25. RICHTMYER R.D. and MORTON K.W.
Difference methods for initial value problems
Interscience Publishers, 1966, pp. 291-292

26. RUNCHAL A.K., SPALDING D.B. and WOLFSHTEIN M.
Numerical solution of the elliptic equations for transport of vorticity, heat and matter in two dimensional flow
The Physics of Fluids, supplement II, 1969, pp. II 21- II 28

27. PEYRET R.
Sur la résolution numérique d'un problème de couche limite
La Recherche Aérospatiale, 1971, n° 3 (Mai-Juin) pp. 133-138

28. KRAUSE E.
Communication privée (1974)

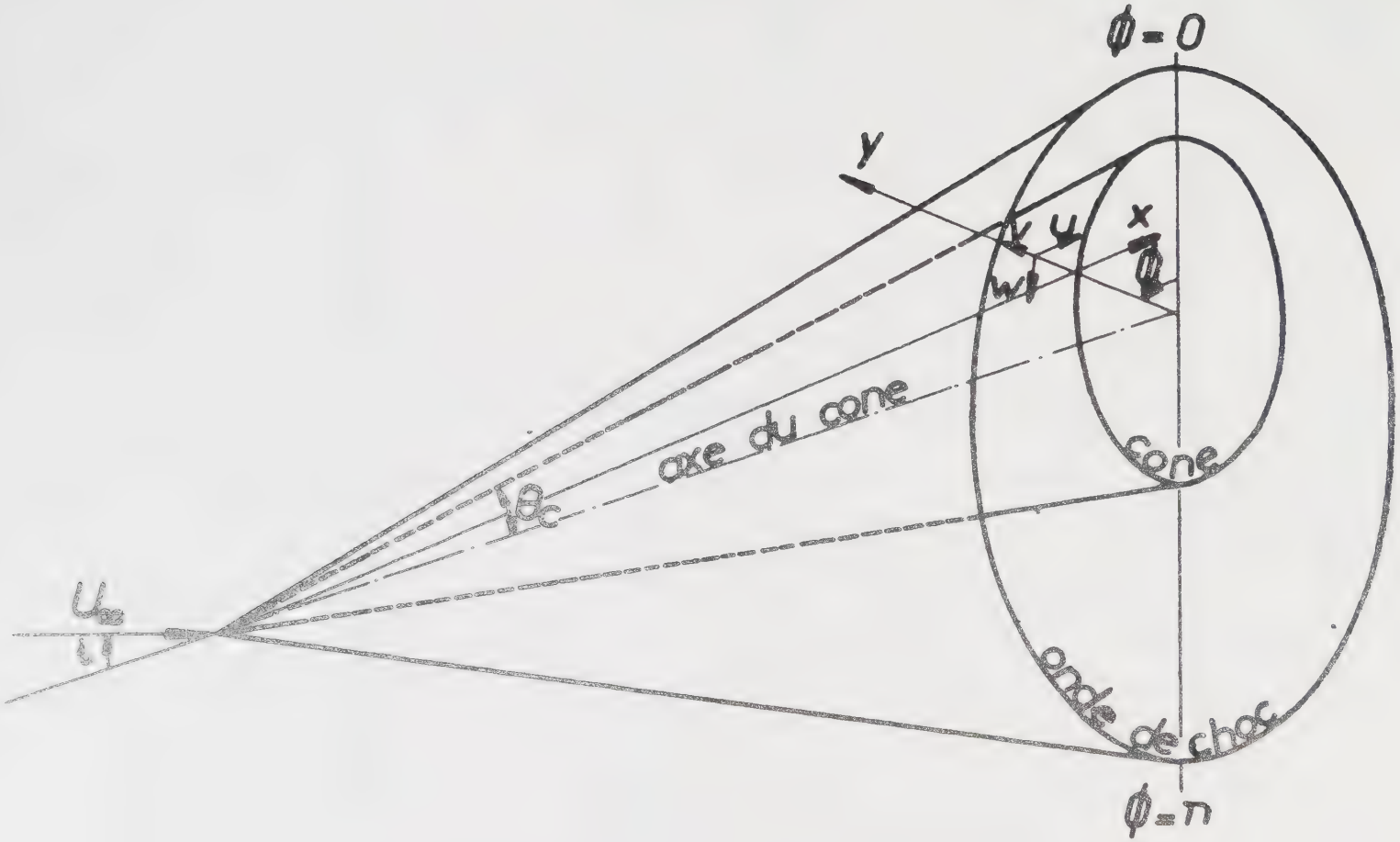
29. JONES D.J.
Tables of inviscid supersonic flow about circular cone at incidence $\gamma = 1,4$
AGARDograph 137, 1969

30. MARCILLAT J. and ROUX B.
Experimental and theoretical study of supersonic viscous flow over a yawed circular cone
A.I.A.A. Journal, Vol. 10, n° 12, December 1972, pp. 1625-1630

31. WANG K.C.
On the determination of the zones of influences and dependence for three dimensional boundary layer equation
J. Fluid Mechanics, 1971, Vol. 48, part 2, pp. 397-404

32. ROUX B.
Supersonic laminar boundary layer near the plane of symmetry of a cone at incidence
J. Fluid Mechanics, 1972, Vol. 51, Part 1, pp. 1-14

33. DORODNICYN A.A.
Review of Methods for solving the Navier-Stokes Equations
Proceedings of the third international Conference on numerical methods in fluid mechanics Vol. I, pp. 1-11
Lecture notes in physics, 18, Springer verlag, 1973

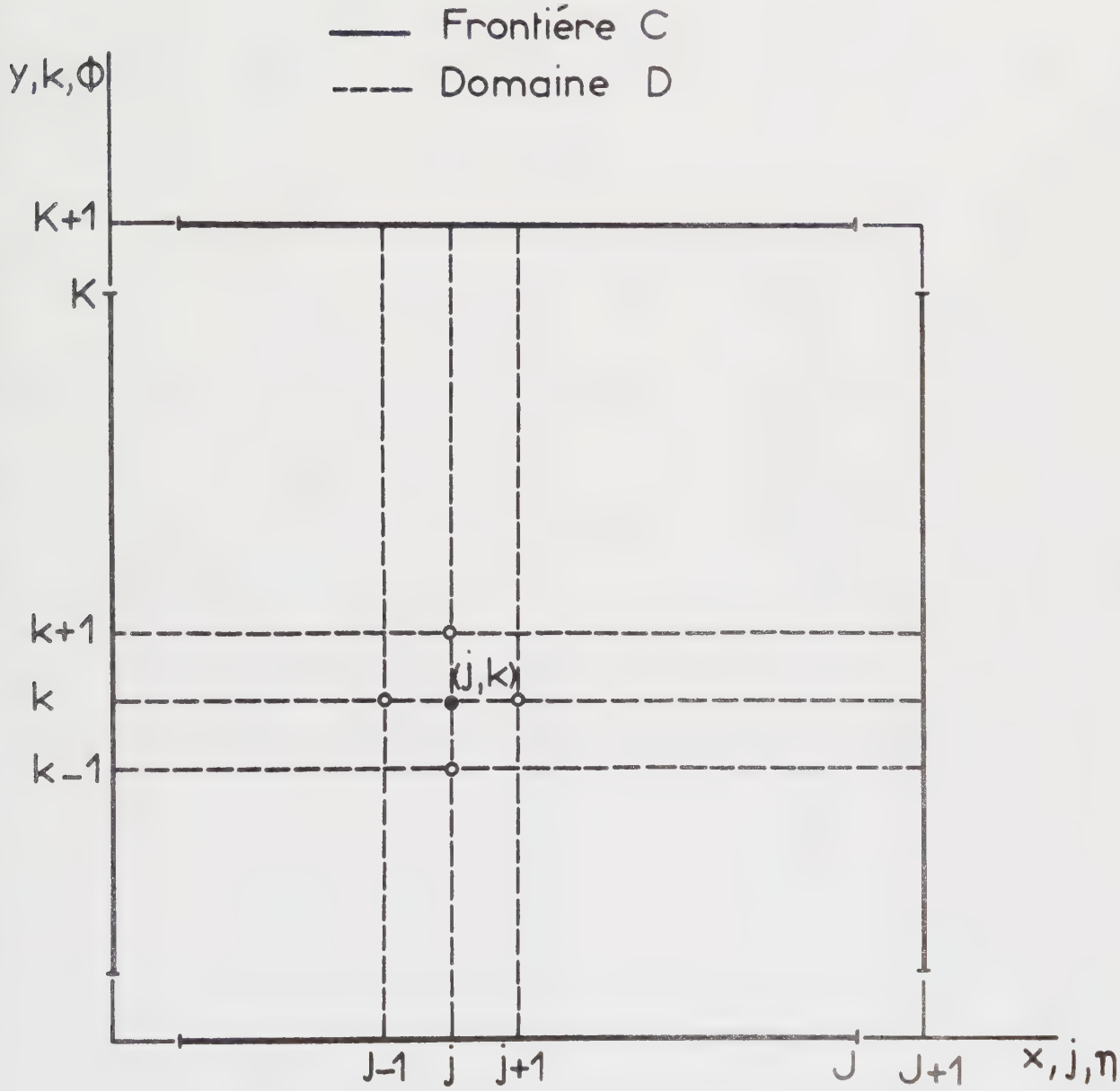


SCHEMA DU CONE

Fig. 1

Fig.2

Schéma aux différences finies



Cas parabolique

Fig.3

Evolution de la variable w en fonction de l'azimut

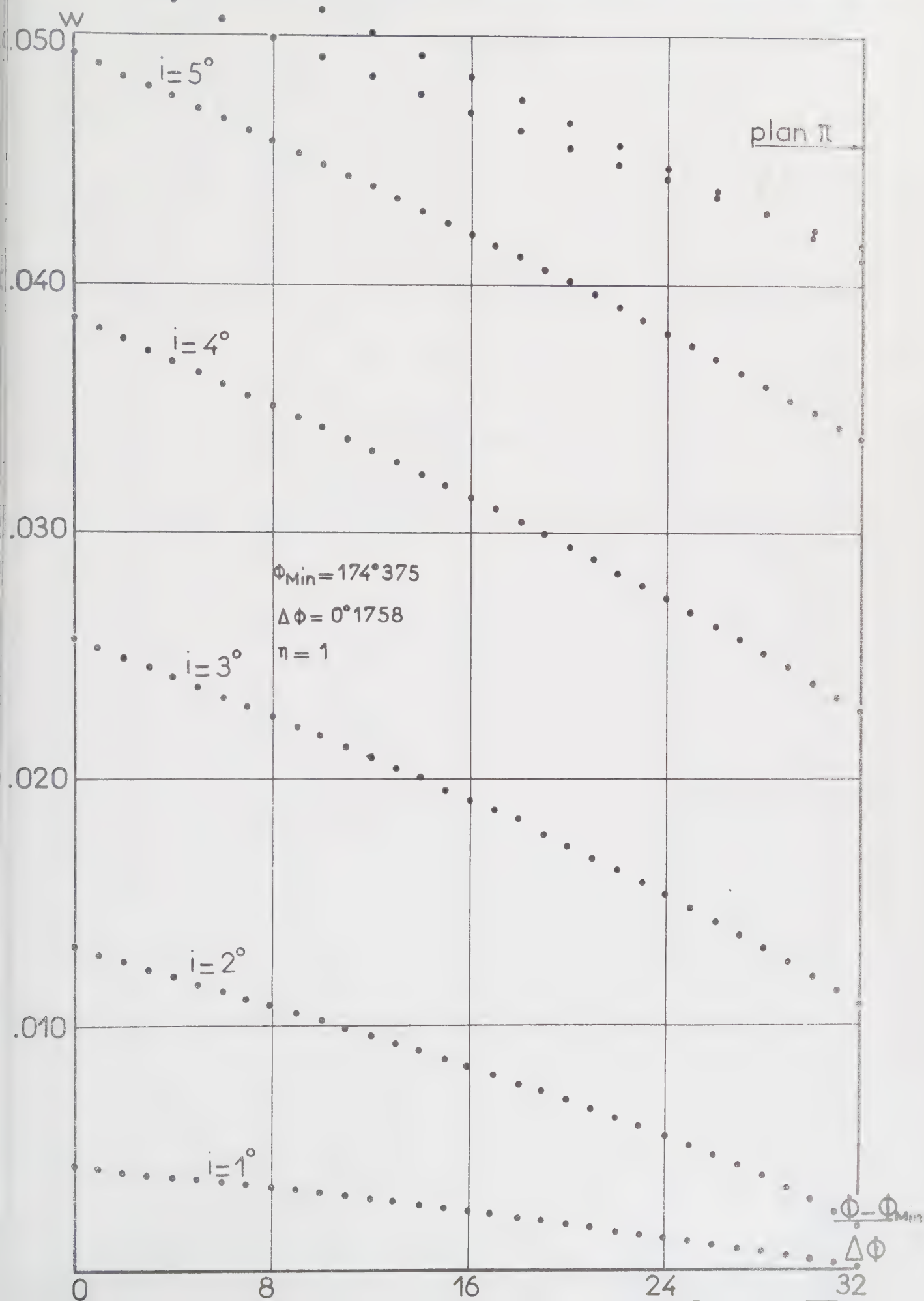
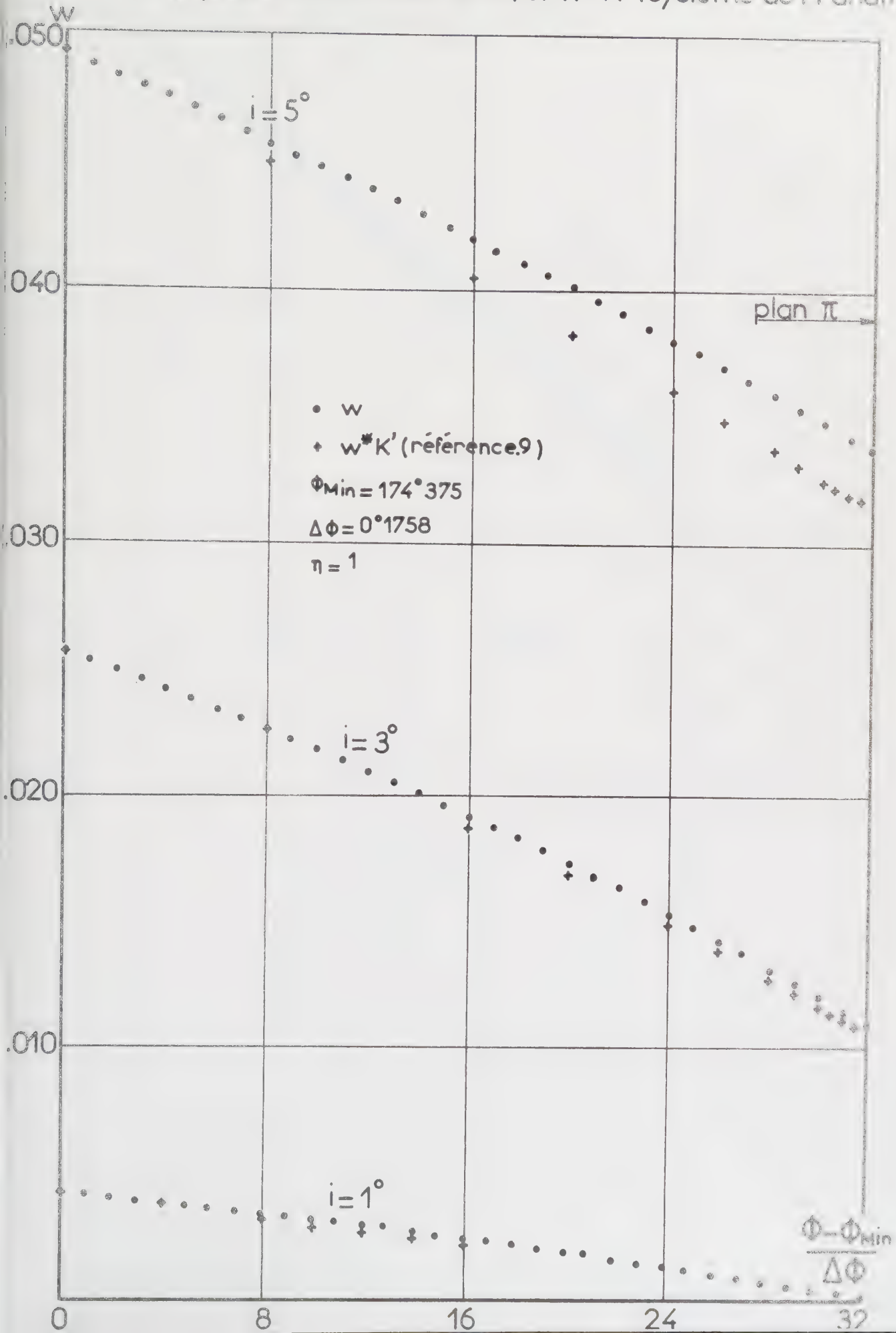


Fig.4

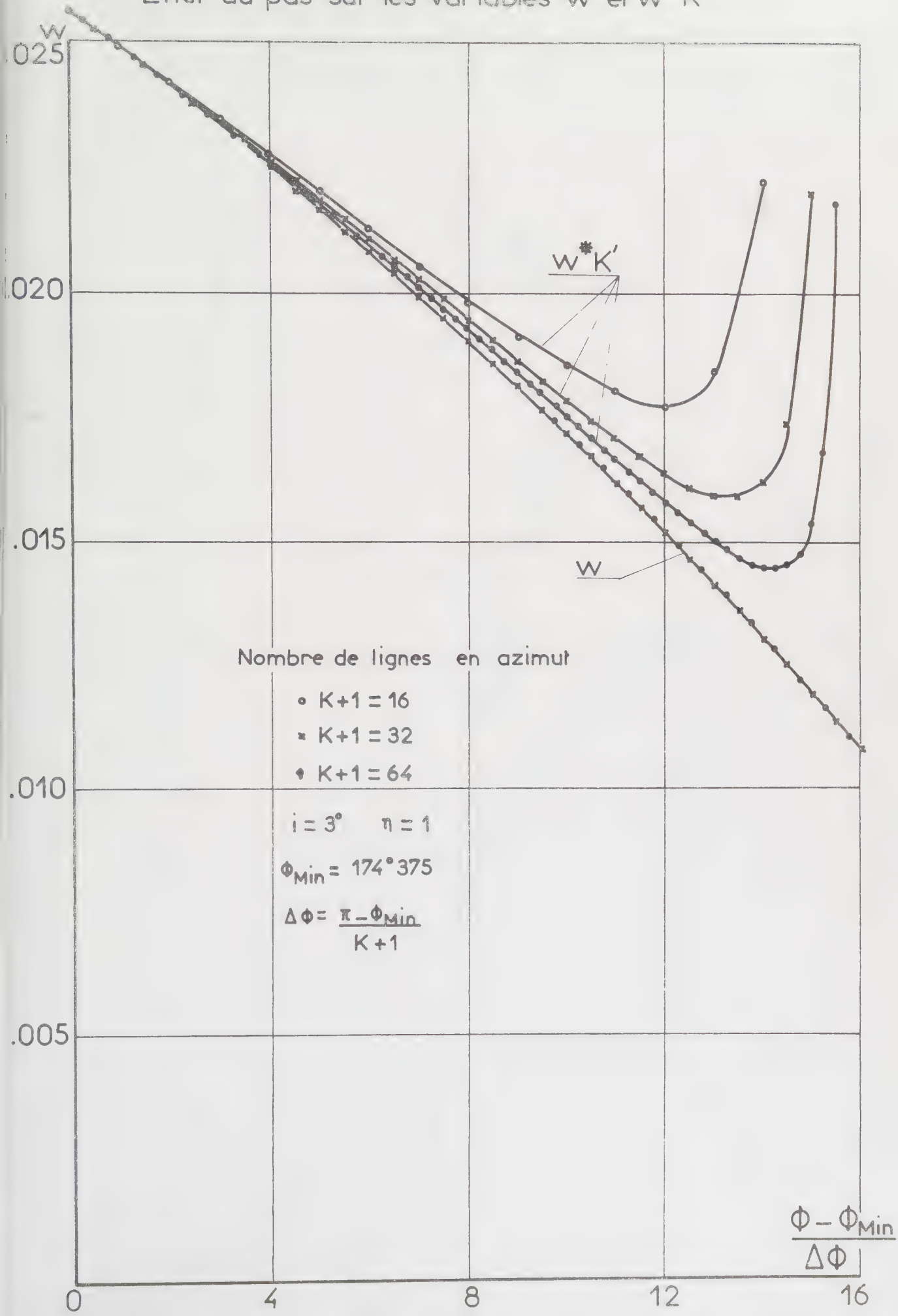
Cas parabolique : Evolution comparée des variables w (équation azimutale seule) et w*K' (systéme de Prandtl)



Cas parabolique

Effet du pas sur les variables w et w^*K'

Fig. 5



Variation du nombre d'itérations en fonction du Reynolds

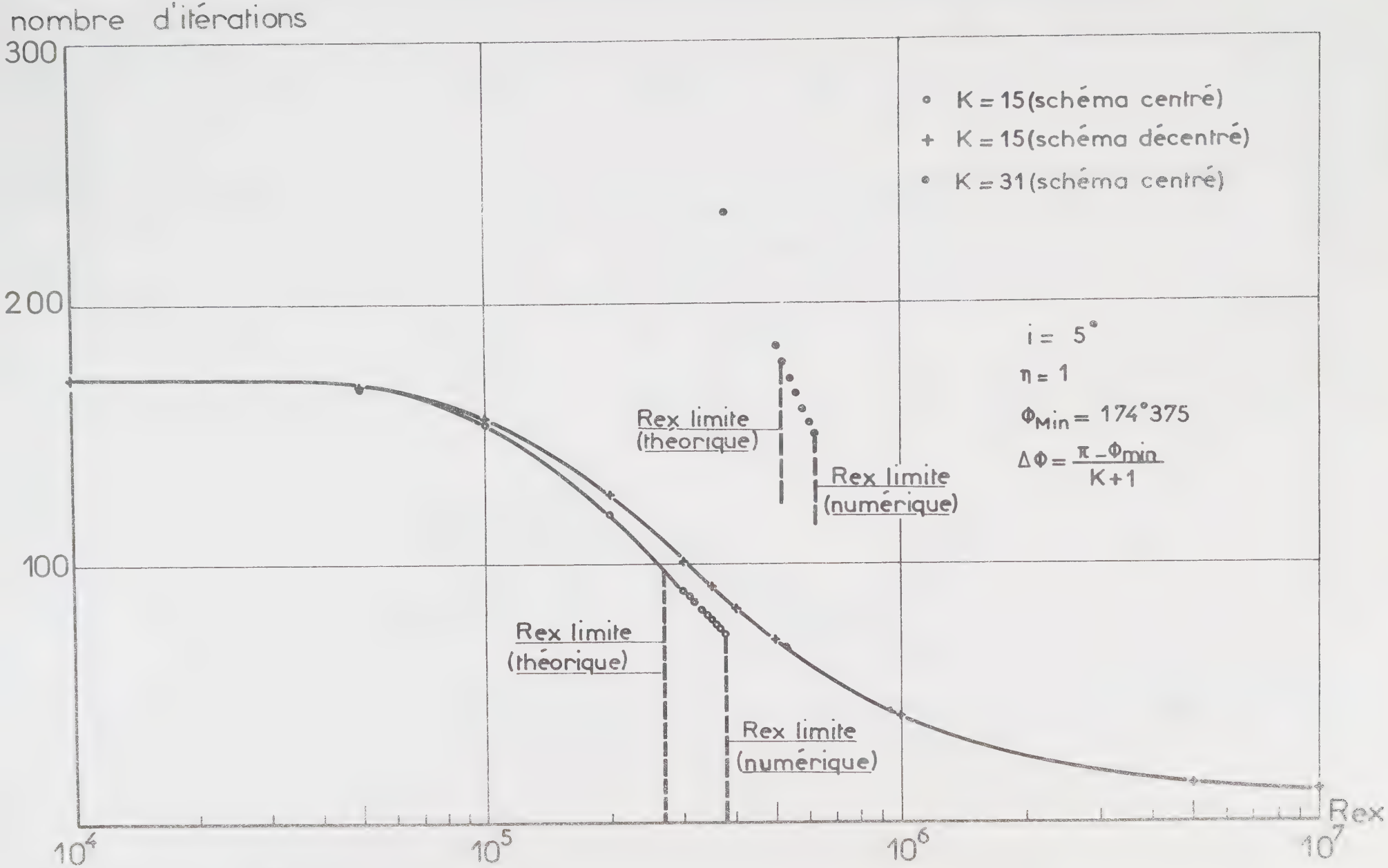


Fig. 6

Variation du nombre d'itérations en fonction du Reynolds

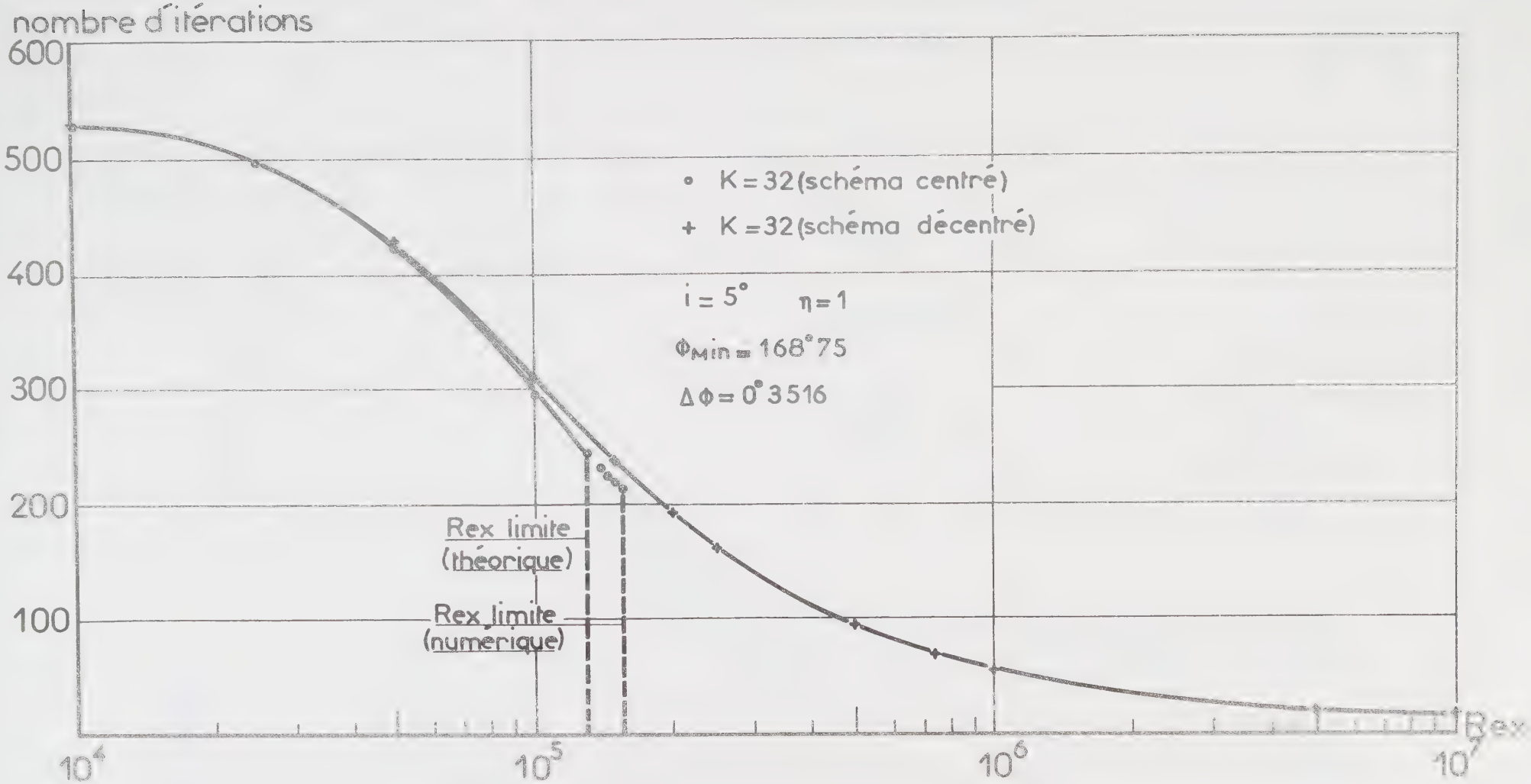


Fig 7

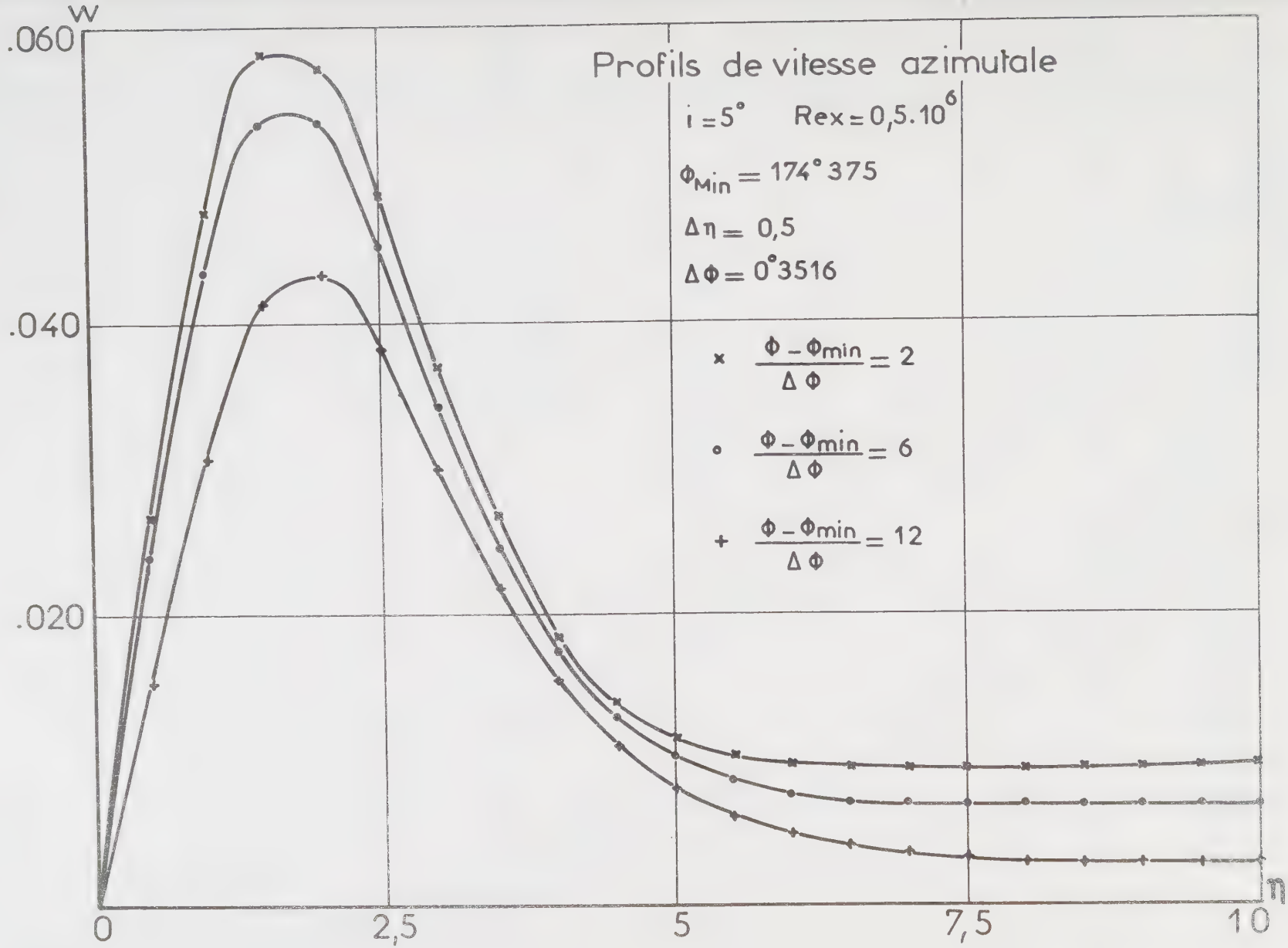
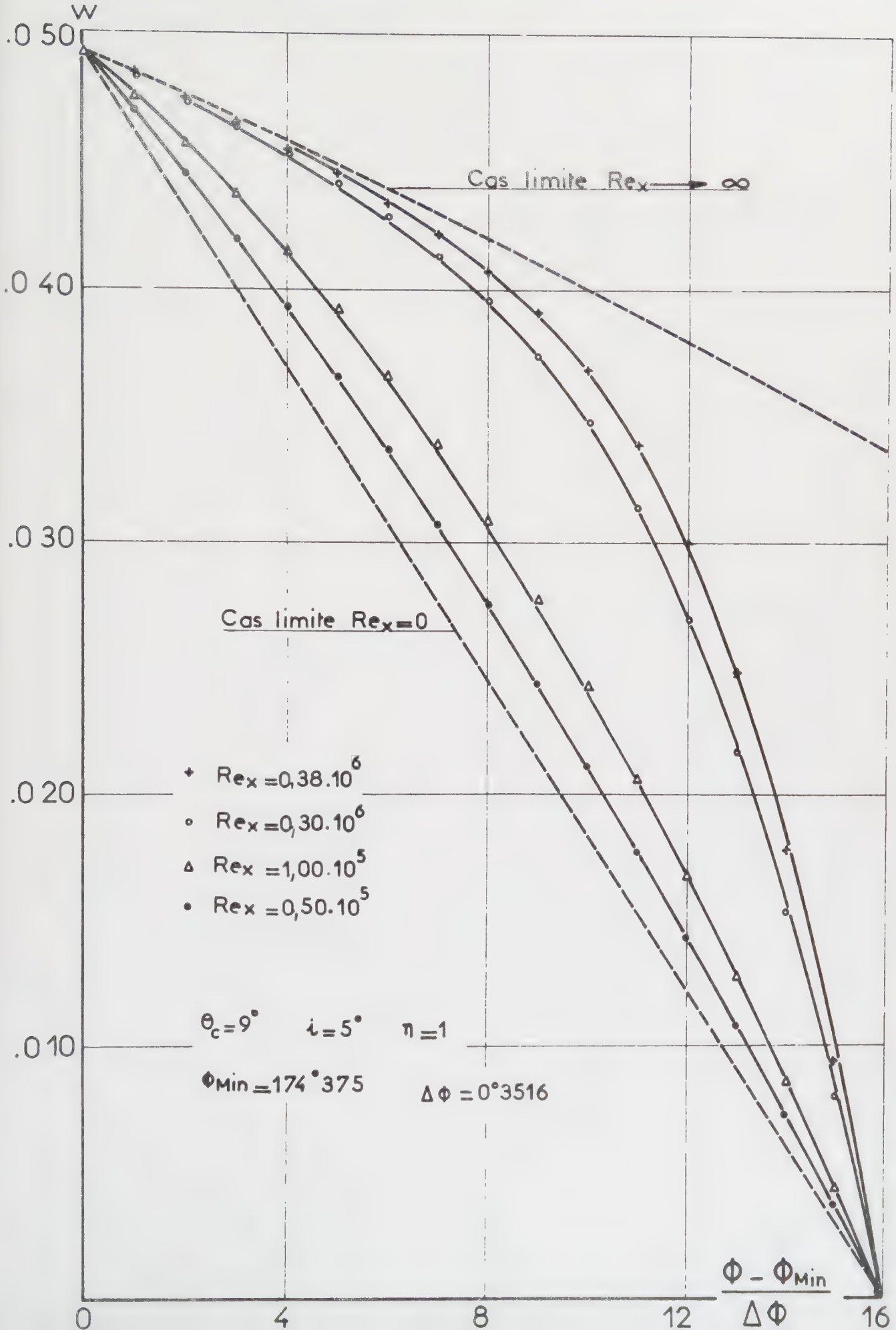

Profils de vitesse azimutale
i = 5° Rex = 0,5.10^6
Φ_Min = 174° 375
Δη = 0,5
ΔΦ = 0°3516
× (Φ − Φmin)/ΔΦ = 2
∘ (Φ − Φmin)/ΔΦ = 6
+ (Φ − Φmin)/ΔΦ = 12
w
.060
.040
.020
0
2,5
5
7,5
10
η

Fig.8

Evolution de W en fonction de l'azimut

schéma centré

Fig. 9



Evolution de W en fonction de l'azimut

schéma décentré

Fig.10

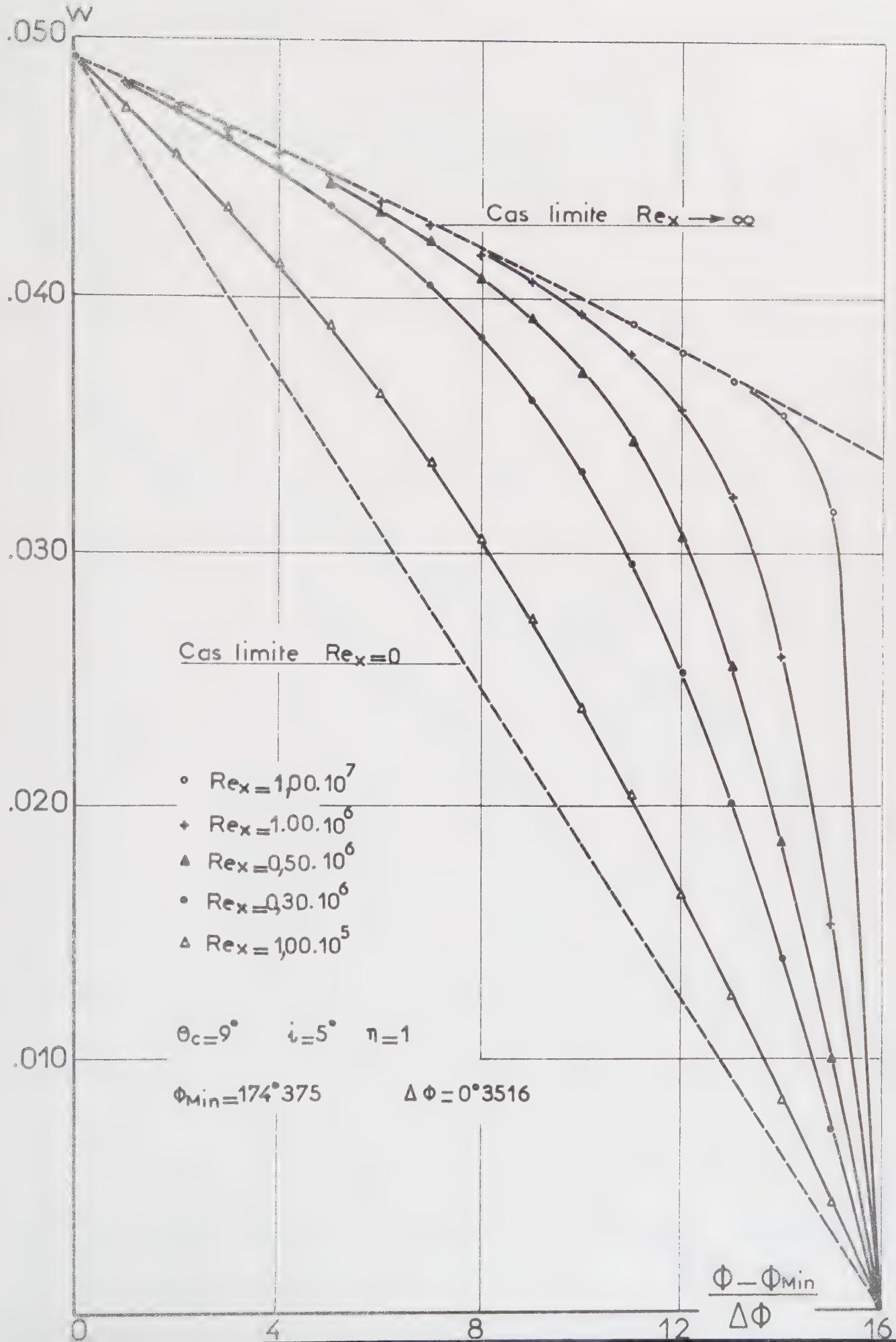
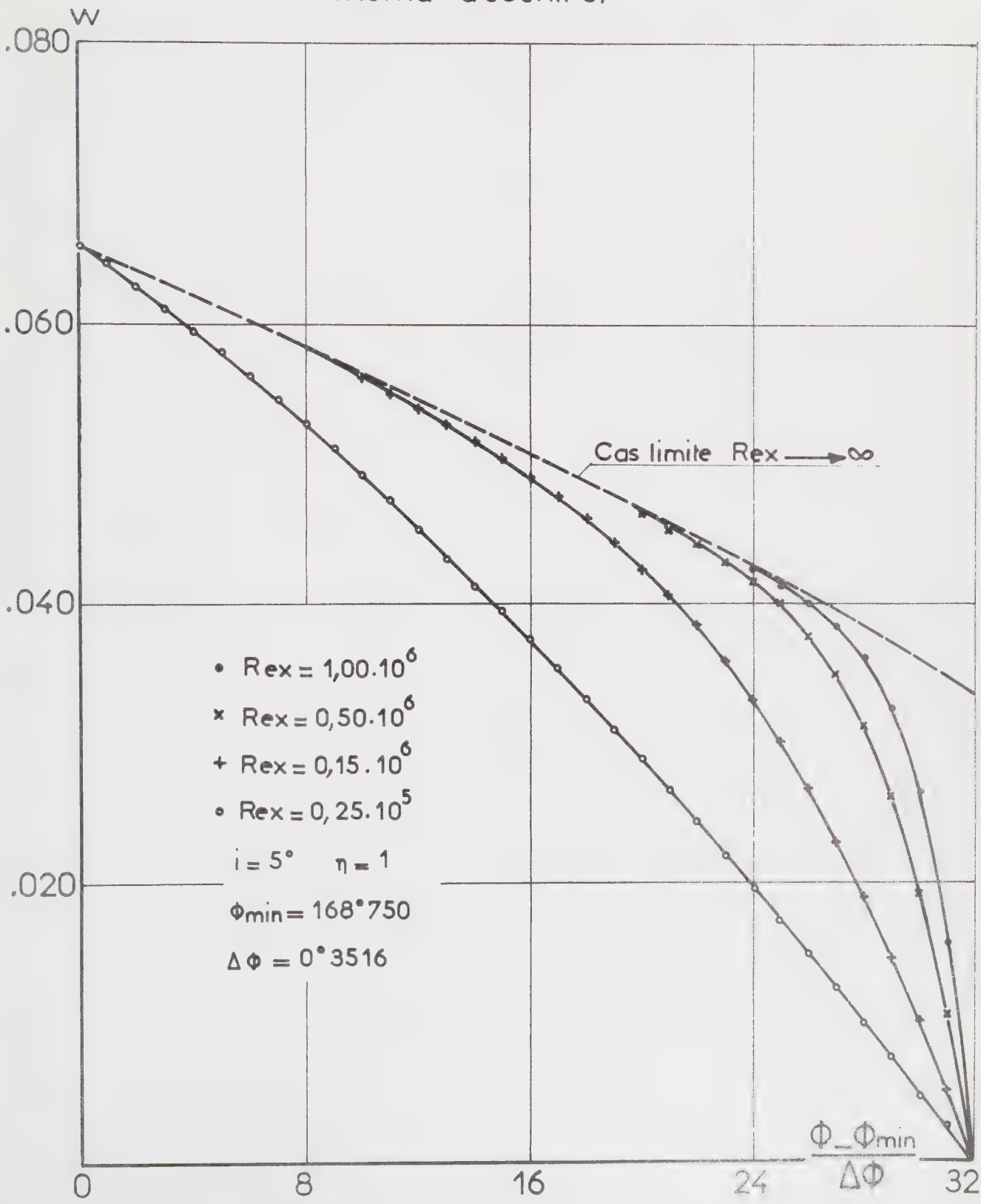


Fig.11

Evolution de w en fonction de l'azimut
(schéma décentré)



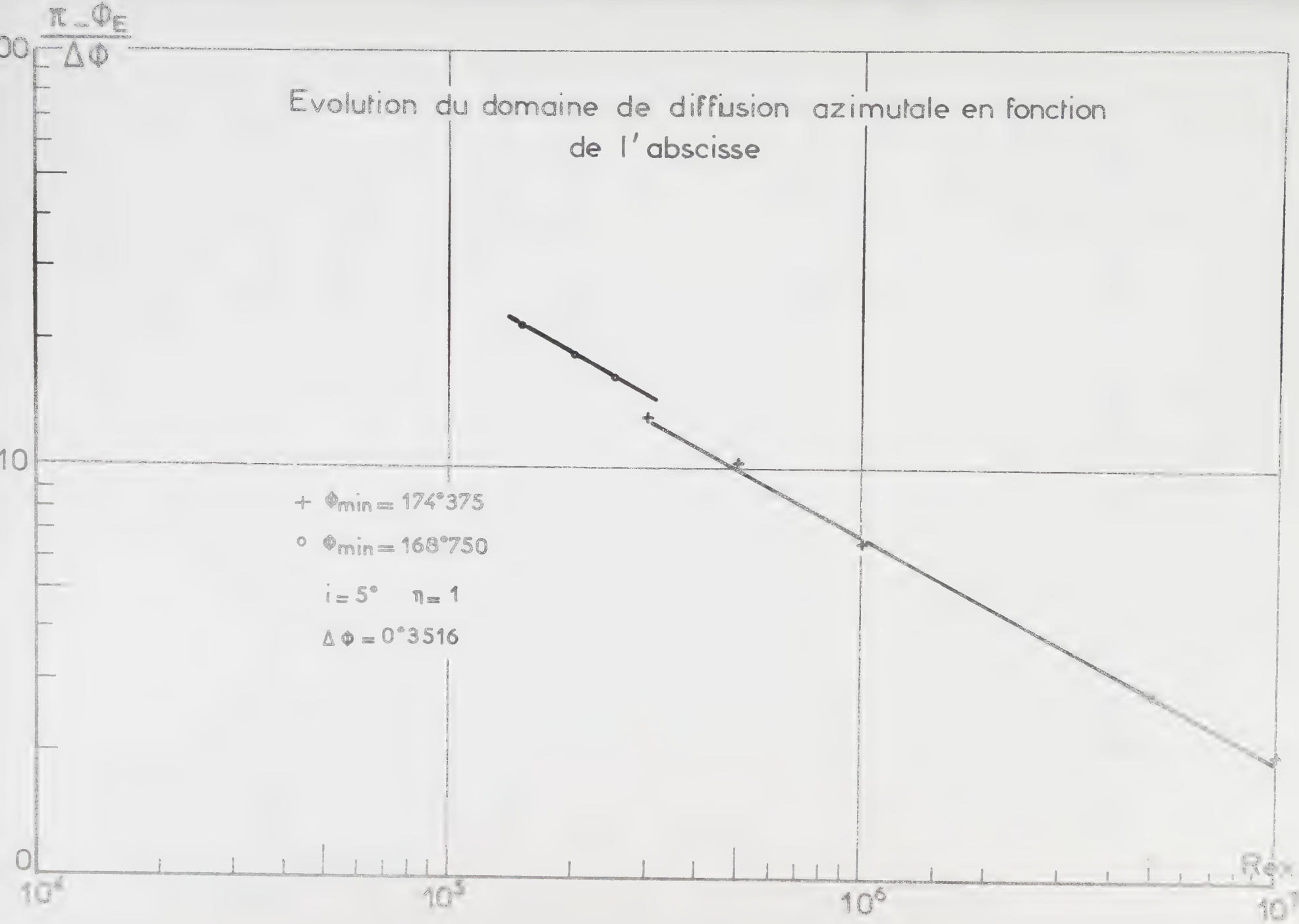

Evolution du domaine de diffusion azimutale en fonction de l'abscisse
$\frac{\pi - \Phi_E}{\Delta\Phi}$
00
10
0
+ $\Phi_{min} = 174°375$
o $\Phi_{min} = 168°750$
$i = 5°$ $\eta = 1$
$\Delta\Phi = 0°3516$
10^4
10^5
10^6
10^7
$R_{\phi x}$

Fig.12

Fig.13

Variation de w en fonction de l'azimut à l'incidence 3°

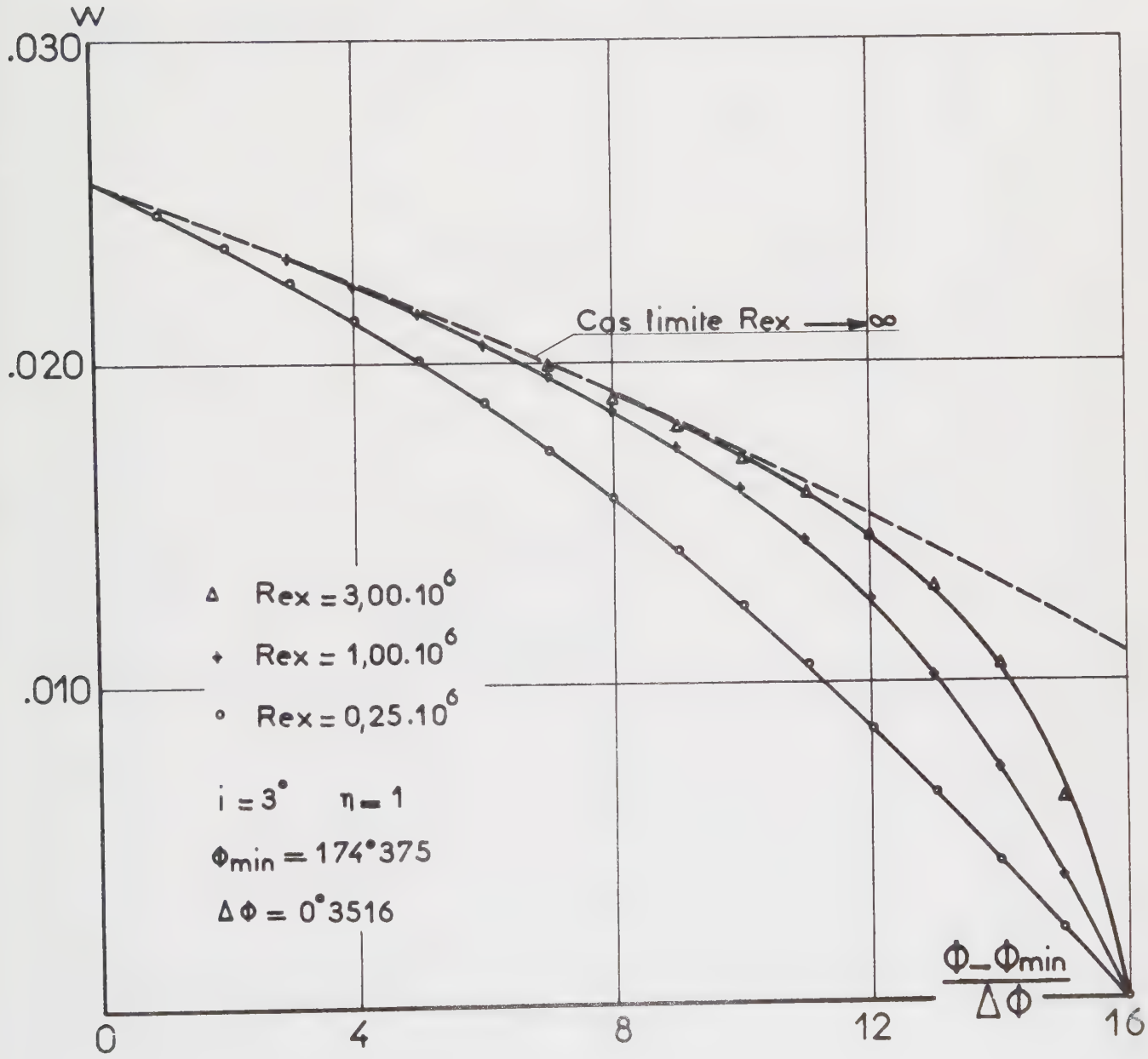


Fig. 14

Variation de w en fonction de l'azimut à l'incidence 7°

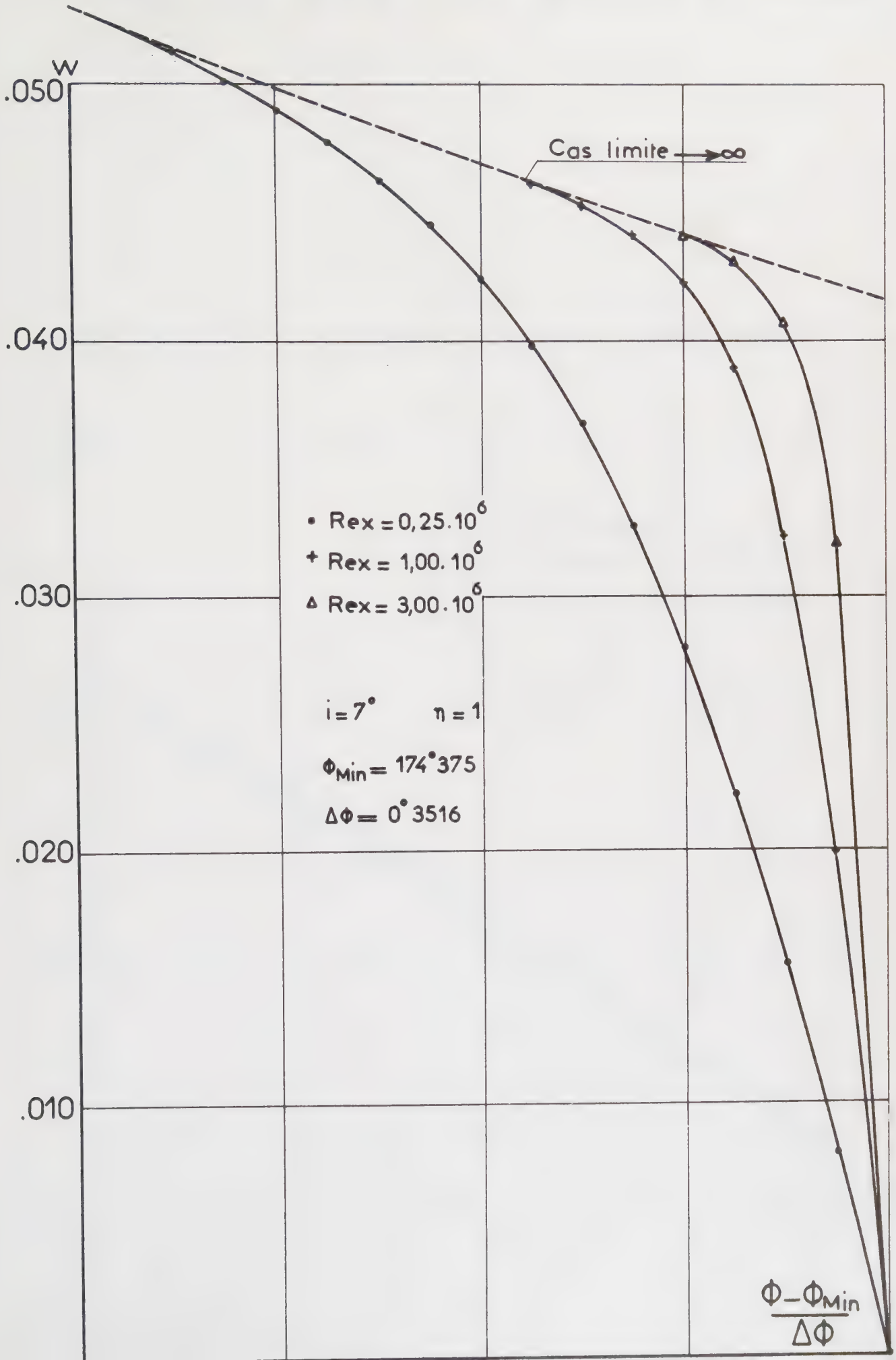
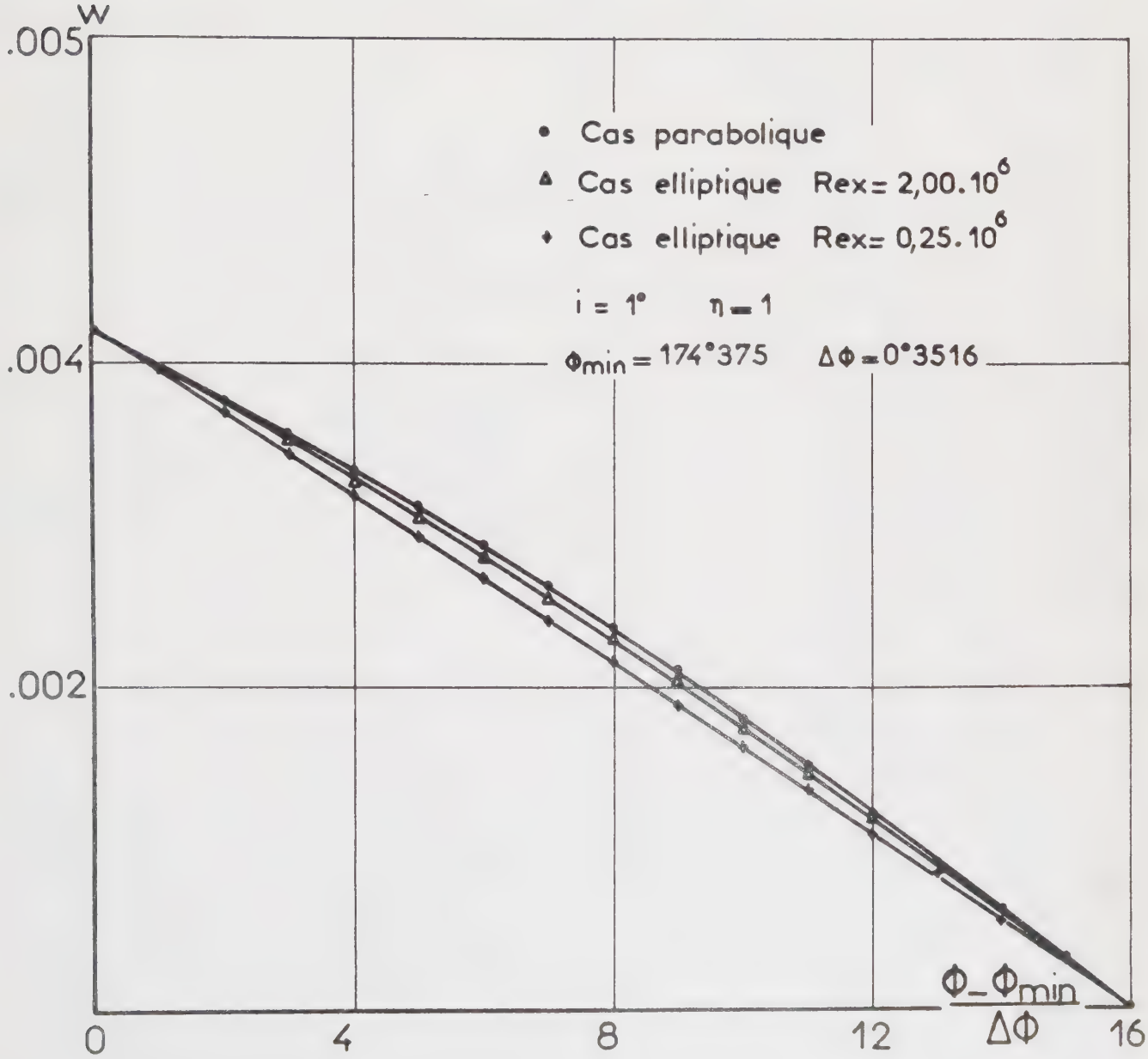
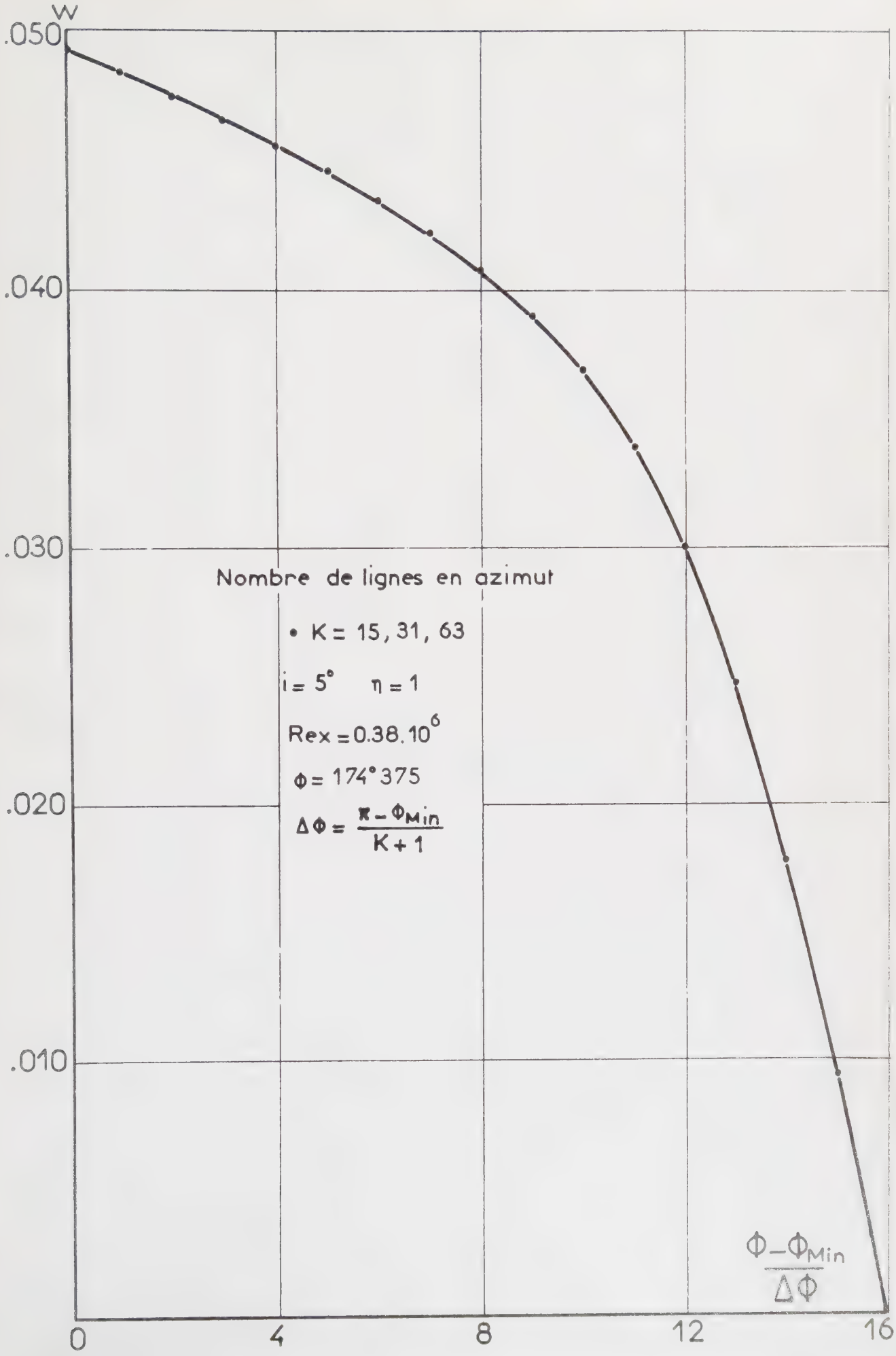


Fig.15

Variation de w en fonction de l'azimut à l'incidence 1°



Effet de la taille du pas (schéma centré) Fig.16



Effet de la taille du pas (schéma décentré) Fig.17

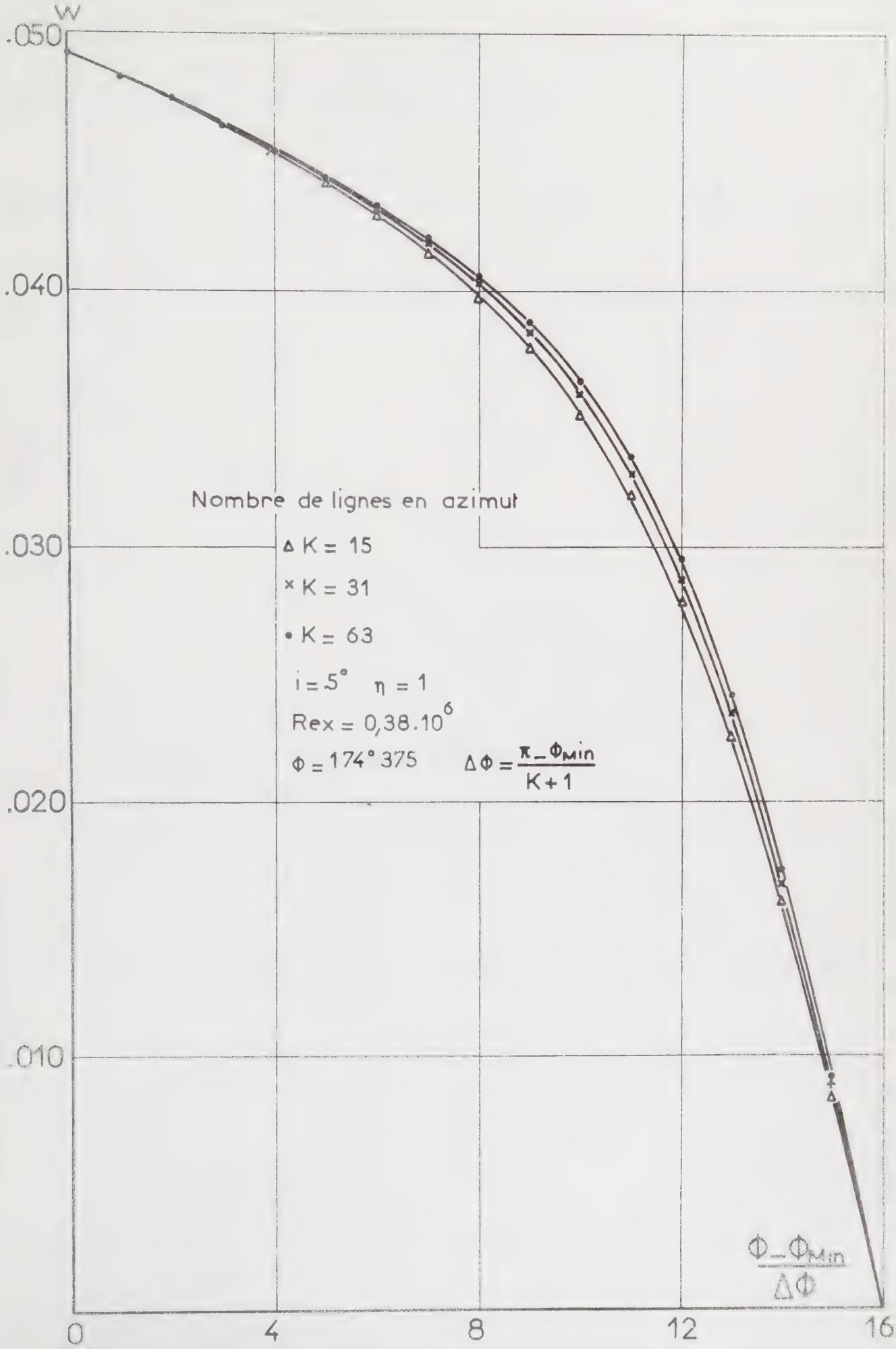


Fig. 18

Evolution de w à $\Delta\Phi^*$ constant en fonction de l'azimut

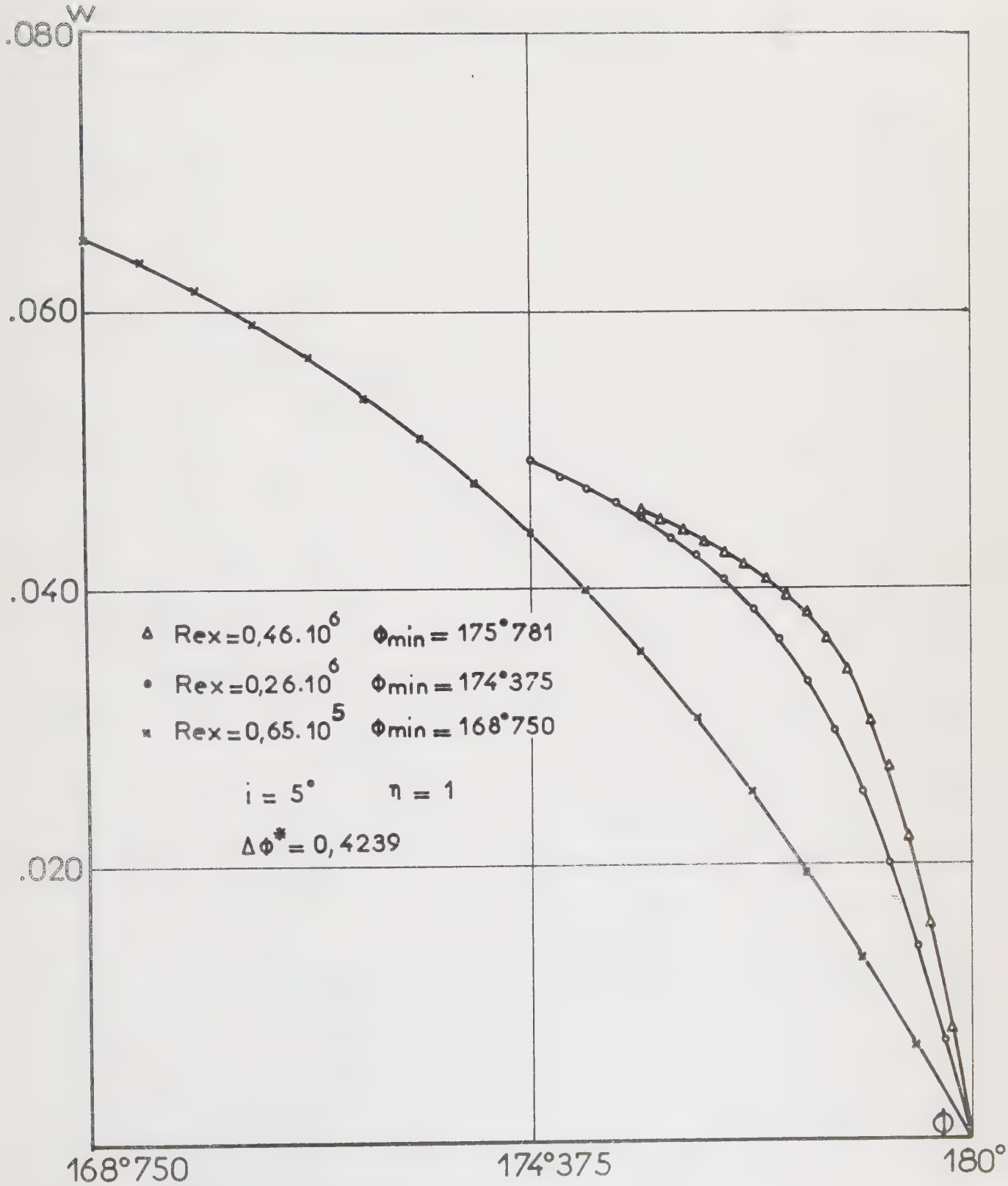
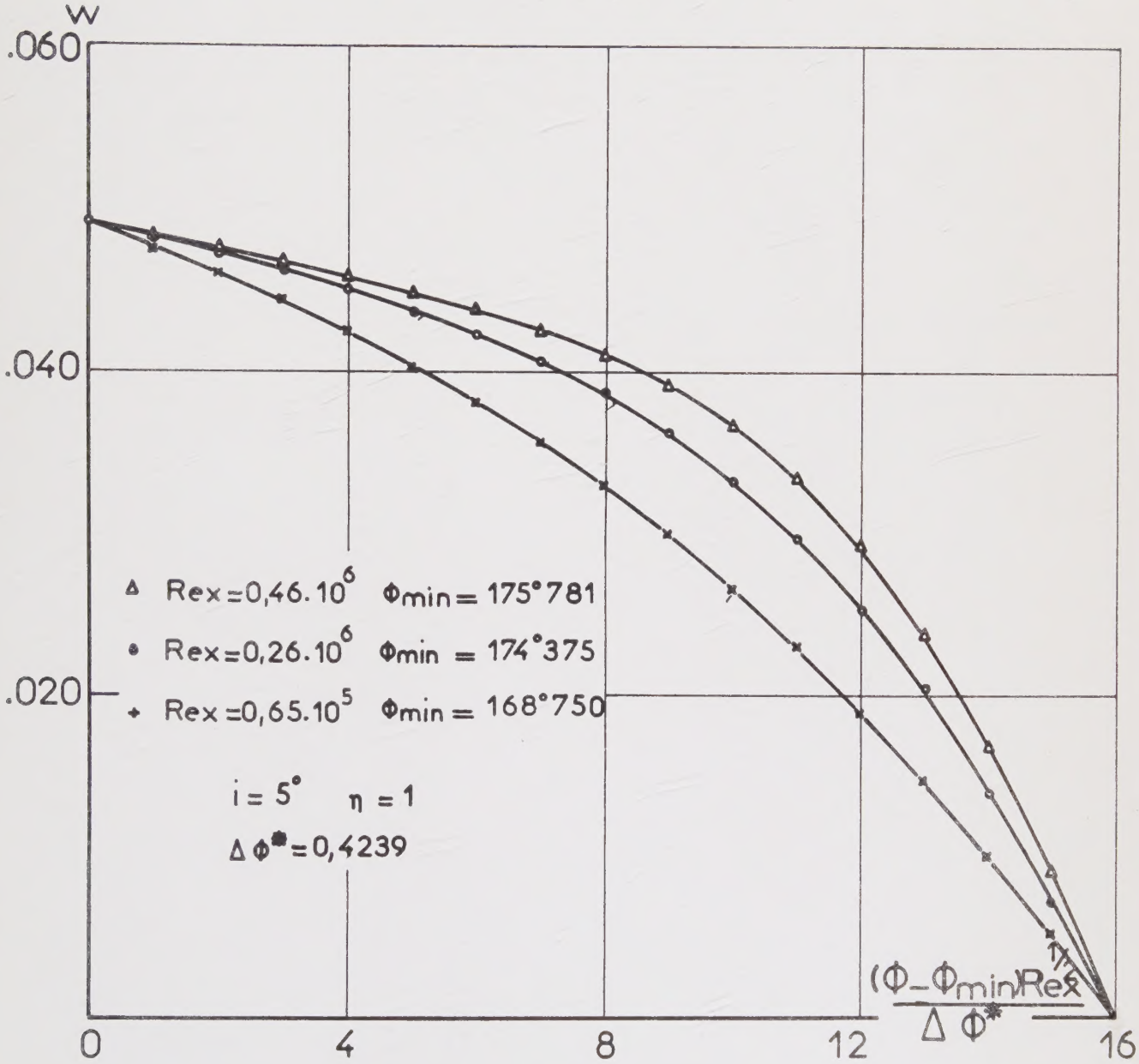


Fig.19

Evolution de w à $\Delta\Phi^*$ constant en fonction de l'azimut